

Ha π day

March 14th - 3.14 - Lycée LLG

Venez découvrir la recherche
en Mathématiques avec
quatre exposés de
chercheurs
au Grand parloir

Sofia
Tarricone
9h30 – 10h15

Le diamant
Aztèque et son
 cercle arctique

Tommaso
Rossi
10h15 – 11h00

La géométrie
sous-
riemannienne
du problème de
Didon

Guillaume
Blanc
15h30 – 16h15

Voyage en
probabilités :
percolation et
géométrie
aléatoire

Mathématiques
dans la
perception
visuelle des
contours

Virginia
Bolelli
16h15 – 17h



THEO.JAMIN@PSL.EU
PABLO.JIMENEZ@PSL.EU

Haπ day - 3.14

Programme	
Créneaux	Descriptifs
9h - 9h30	Accueil, présentation des intervenants, description des ateliers
9h30 - 11h	Exposés de Sofia TARRICONE et Tommaso ROSSI
11h - 12h	Démarrage des ateliers

Déjeuner	
13h30 - 15h	Reprise des ateliers
15h 9min 26s	Dégustation des π es et votes
15h30 - 17h	Exposés de Virginia BOLELLI et Guillaume BLANC
17h	Clôture du π -day



FIGURE 1 – QR code pour le vote de la meilleure Pie.

1 Exposés

1.1 Sofia Tarricone

Titre : *Le diamant Aztèque et son cercle arctique.*

Résumé : Dans cet exposé nous allons nous pencher sur la question suivante : pour tout entier naturel n , combien le diamant Aztèque de dimension n admet-il de pavages par des tuiles rectangulaires de taille 2×1 ou 1×2 ? La réponse fut donnée par Elkies, Kuperberg, Larsen et Propp en 1992, via différentes méthodes. Nous nous intéresserons en particulier à la preuve basée sur un algorithme qui permet de construire des pavages de façon récursive. Cet algorithme est fondamental puisqu'il permet de représenter des pavages aléatoires (uniformes) d'un diamant Aztèque de tailles assez grandes et de visualiser le phénomène dit du « cercle arctique ».

1.2 Tommaso Rossi

Titre : *La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon.*

Résumé : Le problème de Didon est une version du problème isopérimétrique en \mathbb{R}^2 . On va voir que, en ajoutant une variable, on peut reformuler ce problème comme celui de trouver les géodésiques (c'est-à-dire les courbes les plus courtes) d'une variété sous-riemannienne, appelée le groupe de Heisenberg.

1.3 Virginia Bolelli

Titre : *Mathématiques dans la perception visuelle des contours.*

Résumé : Dans cet exposé, nous présenterons une approche disciplinaire visant à examiner l'importance des Mathématiques dans la compréhension des mécanismes de la perception visuelle des contours. En nous appuyant sur les fondements de la théorie psychologique de la Gestalt, nous étudierons comment les modèles mathématiques contribuent à décrire et interpréter les processus neuronaux impliqués dans le traitement des informations visuelles relatives aux contours.

1.4 Guillaume Blanc

Titre : *Voyage en probabilités : percolation et géométrie aléatoire.*

Résumé : On voyagera autour de quelques jolis modèles de deux thèmes centraux en probabilités, qui sont la percolation et la géométrie aléatoire. Dans son plus simple appareil, la percolation a été introduite dans la littérature mathématique par Broadbent et Hammersley en 1957, et fait toujours l'objet de recherches intensives actuellement. Pas si loin de la percolation, la géométrie aléatoire consiste en l'étude d'espaces métriques aléatoires : des espaces dans lesquels on précise comment mesurer la distance entre les points, et dont on peut construire naturellement plein d'exemples probabilistes avec des propriétés riches. Pour les personnes que les mots clés font rêver, on parlera de percolation par arêtes sur le réseau euclidien, de percolation de premier passage, de processus de droites dans l'espace euclidien, et de géométrie aléatoire avec des processus de routes. Pour les personnes que les mots clés effraient, pas de panique ;-)

2 Ateliers

2.1 Un ascenseur pas pratique — Théo Jamin

Vous venez de monter dans un ascenseur possédant seulement 4 boutons :

- un bouton permet de monter de 5 étages,
- un autre permet de descendre de 5 étages,
- un troisième propose de monter de 7 étages,
- et le dernier, de descendre de 7 étages.

On supposera qu'il n'y a pas de limite d'étages en descendant ni en montant.

1. Est-il possible d'aller au 243^{ème} étage avec cet ascenseur ?
2. De manière plus générale, à quel étage peut-on se rendre ?
3. Que se passe-t-il si je change 5 par 11 et 7 par 17 ? Ou encore par n et m ?
4. Pouvez-vous trouver un algorithme pour se rendre (si cela est possible) à l'étage ℓ ?
5. Si l'on impose que l'ascenseur ne peut plus descendre en dessous du rez-de-chaussée ?

2.2 Une lettre d'Euler — Théo Jamin

Vous avez reçu une lettre d'EULER. Malheureusement, vous venez de faire tomber votre café dessus... Vous l'ouvrez et découvrez qu'une partie est illisible. Vous lisez

J'ai trouvé une élégante formule qui relie le nombre de sommets s , de faces f et d'arêtes a de n'importe quel polyèdre convexe de l'espace :

$$s - a + f = 2.$$

En voici une élégante démonstration :

*** Tache de café ***

Pourriez-vous imaginer une preuve que vous pourriez transmettre à la communauté mathématique ?

2.3 Un passager anarchiste — Théo Jamin

Un avion a des places numérotées de 1 à n , avec n un entier naturel. Le jour de l'embarquement, toutes les places ont été attribuées à un passager et les passagers se présentent dans l'ordre de leurs numéros de siège. Le premier passager, ne respectant pas les règles, s'assoit au hasard (il est possible qu'il s'assoie à sa place attitrée). Les passagers suivants s'assoient à leur place attitrée si elle est libre et sinon s'assoient au hasard.

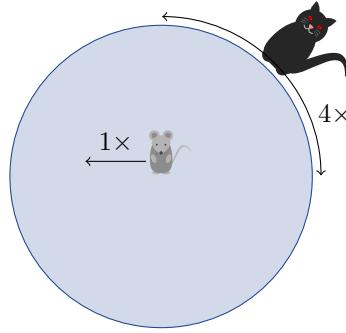
1. Pour $n = 2, 3$ ou 4 , déterminer la probabilité que le dernier passager puisse s'asseoir à sa place.
2. Déterminer cette probabilité pour n quelconque.

2.4 Un jeu dangereux — Théo Jamin

Vous participez à un jeu dans lequel, à chaque fois qu'une personne est touchée elle est éliminée. Vous êtes disposés en cercle et on vous attribue un numéro de 1 à n (pour n le nombre de joueurs) dans le sens des aiguilles d'une montre. Le premier joueur touche la personne suivante, qui est donc éliminée. Le joueur suivant fait de même et le jeu continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un joueur restant qui est déclaré vainqueur. Trouver un critère pour choisir votre place en fonction du nombre de joueurs n .

2.5 Le chat et la souris — Théo Jamin

Vous êtes dans votre jardin et vous venez de voir une souris tomber dans votre piscine (tout à fait ronde). Votre chat, comme tous les chats, aime les souris mais a horreur de l'eau. Vous notez que votre chat se déplace quatre fois plus vite que la souris.



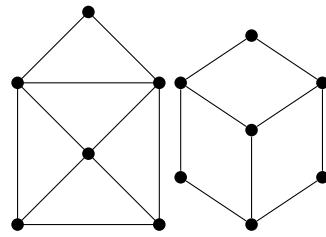
La question que vous vous poser est donc la suivante : la souris réussira t-elle à sortir de la piscine sans se faire attraper par le chat ?

2.6 Les maisons de Dudeney — Théo Jamin

Trois familles voisines se détestant mutuellement ont besoin d'eau, d'électricité et de gaz et doivent donc accéder quand elles le veulent aux trois usines. Vous êtes le maire de la ville où habitent ces familles. Elles vous demandent de l'aide pour l'accès aux usines et expliquent qu'elles souhaitent que vous construisiez les routes d'accès de chacune des maisons à chacune des usines, cependant, elles ne doivent pas se croiser pour éviter tout problème. Avez-vous une solution ? Que se passe t-il si les familles habitent sur une autre planète possédant une géométrie différente de celle de la terre ?

Peut-être que le groupe ayant reçu la lettre d'EULER pourra vous aider...

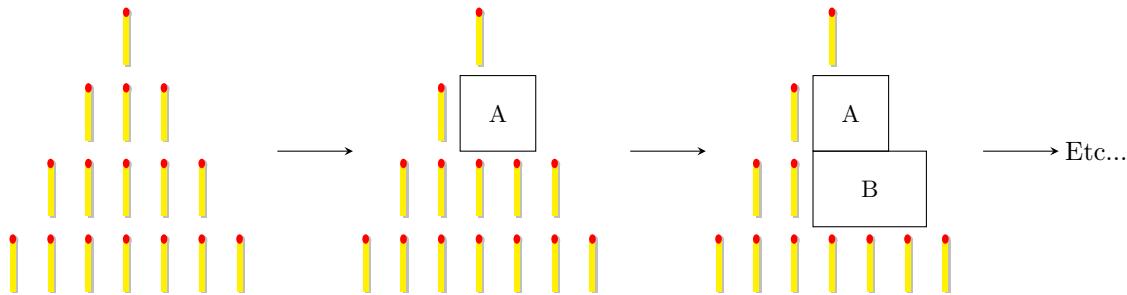
2.7 Parcours eulériens de graphes — Pablo Jiménez



On cherche à dessiner une une forme comme celle-ci sans lever le crayon du papier, et sans passer deux fois par la même arête. Arrivez-vous à le faire sur le dessin de gauche ? Et celui de droite ? On appelle un tel chemin un *parcours eulérien* du *graphe* G en question. En étudiant le nombre d'arêtes qui sortent de chaque sommet, ce qu'on appelle le *degré du sommet*, trouvez une façon de différencier les graphes qui admettent un parcours eulérien de ceux qui n'en ont pas.

2.8 Le jeu de Marienbad — Pablo Jiménez

Le jeu de Marienbad se joue à deux : des allumettes sont disposées en quatre rangs de 1, 3, 5 et 7. Chaque joueur prend alors à son tour le nombre d'allumettes qu'il souhaite dans une seule rangée. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.



L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? Et si on modifie les règles ?

2.9 Exercice du séminaire sur les pavages de $A(n)$ — Sofia Tarricone

Soit $AD(n; x, q)$ la fonction de comptage des pavages de $A(n)$ raffinés

$$AD(n; x, q) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} \prod_{d \in P} x^{v(d)} q^{r(d)} \quad (1)$$

où

$$v(d) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0, & \text{si } d \text{ est horizontale.} \end{cases} \quad r(d) = \begin{cases} (-1)^{i+j+n}(i+n+1), & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0 \text{ si } d \text{ est horizontale.} \end{cases} \quad (2)$$

En supposant que les fonctions aux niveaux n et $n-1$ soient liées par la relation

$$\text{AD}(n; x, q) = (1 + xq)^n \text{AD}(n-1; xq^2, q), \quad (3)$$

prouver, par récurrence sur n , la formule

$$\text{AD}(n; x, q) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + xq^{2k+1})^{n-k}. \quad (4)$$

2.10 Compter les chemins de Dyck — Sofia Tarricone

Problème

Un chemin de Dyck de semi-longueur $n \in \mathbb{N}$ est un chemin dans le réseau \mathbb{N}^2 partant en $(0, 0)$ et arrivant en $(2n, 0)$ où les seuls pas admis sont $(1, 1)$ i.e. \nearrow et $(1, -1)$ i.e. \searrow . Des exemples sont donnés en Figure 2.

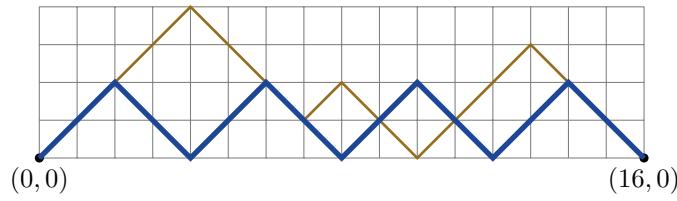


FIGURE 2 – Deux chemins de Dyck de sémi-longueur $n = 8$.

Prouver que le nombre de chemins de Dyck de sémi-longueur n est donné par le nombre de Catalan

$$\text{cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (5)$$

Curiosité

Les nombres de Catalan comptent beaucoup d'objets combinatoires, pour la liste complète voir ...

Avant de voir la preuve, nous faisons le calcul pour les premiers n , voir Figure 3.

— Pour $n = 1$, il y a un seul chemin de Dyck

$$\{(\nearrow, \searrow)\}.$$

— Pour $n = 2$, il y a deux chemins de Dyck

$$\{(\nearrow, \nearrow, \searrow, \searrow), (\nearrow, \searrow, \nearrow, \searrow)\}.$$

— Pour $n = 3$, il y a cinq chemins de Dyck

$$\{(\nearrow, \nearrow, \nearrow, \searrow, \searrow, \searrow), (\nearrow, \nearrow, \searrow, \nearrow, \searrow, \searrow), (\nearrow, \nearrow, \searrow, \searrow, \nearrow, \searrow), (\nearrow, \searrow, \nearrow, \nearrow, \searrow, \searrow), (\nearrow, \searrow, \nearrow, \searrow, \nearrow, \searrow)\}.$$

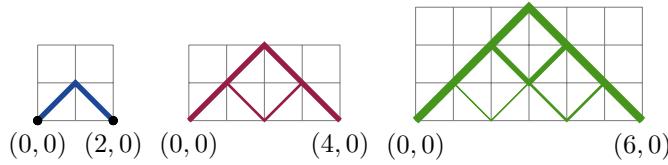


FIGURE 3 – Tous les chemins de Dyck pour $n = 1, 2, 3$.

Pour prouver le résultat, il y a 5 étapes principales à suivre, qui peuvent être considérées comme suggestions.

Étape 1

Voir que le comptage des chemins de Dyck est équivalent au comptage des chemins dans le réseau \mathbb{N}^2 partant en $(0, 0)$ et arrivant en (n, n) dit *up-right* et qui reste au-dessus de la diagonale.

Étape 2

Compter toutes les possibles chemins dans le réseau \mathbb{N}^2 partent en $(0, 0)$ et arrivant en (n, n) dit *up-right* (sans contrainte sur la diagonale) et voir que ils sont

$$\binom{2n}{n} \quad (6)$$

Étape 3

Pour tout n nous notons u_n le nombre de chemins dans le réseau \mathbb{N}^2 partent en $(0, 0)$ et arrivant en (n, n) dit *up-right* et qui reste au-dessus de la diagonale. Parmi ces chemins, nous notons v_n ceux qui ne touchent jamais la diagonale avant le point (n, n) .

i) Prouver que pour tout $n > 1$, nous avons

$$v_n = u_{n-1}.$$

ii) Prouver que les u_n satisfont la récurrence suivante (en décomposant les chemins par rapport au dernier point de la diagonale touché par le chemin avant (n, n) et le point précédent)

$$u_n = u_0 u_{n-1} + u_1 u_{n-2} + u_2 u_{n-3} + \cdots + u_{n-1} u_0, \quad \text{avec } u_0 = 1. \quad (7)$$

Étape 4

Considérer la fonction génératrice des u_n définie comme la série formelle :

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n. \quad (8)$$

Prouver qu'elle satisfait l'équation

$$x(u(x))^2 - u(x) + 1 = 0. \quad (9)$$

Étape 5

Prouver que $u_n = \text{cat}_n$: résoudre d'abord l'équation (9) pour u et utiliser ensuite l'expansion du binôme généralisé dans l'expression pour u obtenue ainsi.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ on pose

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

et

$$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad (10)$$

2.11 Flot de champs de vecteurs — Tommaso Rossi

En \mathbb{R}^n , soient X, Y deux champs des vecteurs lisses. On note par $e^{tX} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot de X , c'est-à-dire que e^{tX} est tel que, pour chaque $q \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tX}(q)$ satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \gamma(0) = q \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (11)$$

Montrer que, lorsque $t \rightarrow 0$,

$$e^{tX} \circ e^{tY} \circ e^{-tX} \circ e^{-tY}(q) = q + t^2[X, Y](q) + o(t^2). \quad (12)$$

Indication : montrer que la suivante expansion asymptotique est valide lorsque $t \rightarrow 0$

$$e^{tX}(q) = q + tX(q) + \frac{t^2}{2}X^2(q) + o(t^2). \quad (13)$$

2.12 Quel est le nombre de facteurs premiers d'un grand entier aléatoire uniforme ? — Guillaume Blanc

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de l'entier n , comptés sans multiplicité. Par exemple, on a $\omega(2) = 1$ et $\omega(4) = 1$ (on convient que $\omega(1) = 0$). À défaut d'avoir une formule explicite pour $\omega(n)$, on cherche à comprendre le comportement de la fonction ω . Pour cela, voici des pistes que vous pouvez explorer.

— Calculer les premières valeurs de $\omega(n)$.

- Quelles valeurs peut prendre $\omega(n)$?
- Quel est le nombre moyen de facteurs premiers d'un grand entier aléatoire uniforme ?
- Quel est le nombre "typique" de facteurs premiers d'un grand entier aléatoire uniforme ?

Pour vous aider, vous pouvez considérer les affirmations suivantes.

- Si X_n est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}.$$

Plus généralement, quelle que soit $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(X_n \in A) = \frac{\#A}{n}.$$

- Pour toute fonction $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$, on définit l'espérance de $f(X_n)$ par

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum_{k=1}^n f(k) \cdot \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(k).$$

Intuitivement, c'est la valeur moyenne de $f(k)$ pour un entier k tiré uniformément au hasard entre 1 et n . Si f et g sont des fonctions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans \mathbb{R} , et si λ et μ sont des réels, alors

$$\mathbb{E}[\lambda \cdot f(X_n) + \mu \cdot g(X_n)] = \lambda \cdot \mathbb{E}[f(X_n)] + \mu \cdot \mathbb{E}[g(X_n)].$$

- On peut écrire

$$\omega(X_n) = B_{p_1}^n + \dots + B_{p_k}^n,$$

où $p_1 < \dots < p_k$ sont les nombres premiers $p \leq n$, et B_p^n est la variable aléatoire qui vaut 1 si p divise X_n , et 0 sinon.

- Pour toute fonction $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$, on définit la variance de $f(X_n)$ par

$$\mathbb{V}(f(X_n)) = \mathbb{E}[(f(X_n) - \mathbb{E}[f(X_n)])^2].$$

Intuitivement, la variance mesure l'écart à la moyenne. En développant le carré, on peut aussi écrire

$$\mathbb{V}(f(X_n)) = \mathbb{E}[f(X_n)^2] - \mathbb{E}[f(X_n)]^2.$$

- Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|f(X_n) - \mathbb{E}[f(X_n)]| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(f(X_n))}{\alpha^2}.$$

Pour faire sens du membre de gauche, remarquez qu'on peut l'écrire $\mathbb{P}(X_n \in A)$, avec

$$A = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : |f(k) - \mathbb{E}[f(X_n)]| \geq \alpha\}.$$

- On a

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + O(1) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où la somme porte sur les nombres premiers $p \leq n$.

2.13 Quelle est la probabilité que deux grands entiers aléatoires uniformes indépendants soient premiers entre eux ? — Guillaume Blanc

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on dit que m et n sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1, ou de manière équivalente, s'il n'existe pas de nombre premier p qui divise m et n . Quelle est la probabilité que deux grands entiers aléatoires uniformes indépendants soient premiers entre eux ?

Pour vous aider, vous pouvez considérer les affirmations suivantes.

- Si X_n et Y_n sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = i; Y_n = j) = \frac{1}{n^2}.$$

Plus généralement, quelle que soit $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$\mathbb{P}((X_n, Y_n) \in A) = \frac{\#A}{n^2}.$$

- Pour toute fonction $f : \llbracket 1, n \rrbracket^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on définit l'espérance de $f(X_n, Y_n)$ par

$$\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(i, j) \cdot \mathbb{P}(X_n = i; Y_n = j) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(i, j).$$

Intuitivement, c'est la valeur moyenne de $f(i, j)$ pour deux entiers i et j tirés indépendamment et uniformément au hasard entre 1 et n . Si f et g sont des fonctions de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ dans \mathbb{R} , et si λ et μ sont des réels, alors

$$\mathbb{E}[\lambda \cdot f(X_n, Y_n) + \mu \cdot g(X_n, Y_n)] = \lambda \cdot \mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] + \mu \cdot \mathbb{E}[g(X_n, Y_n)].$$

Si f et g sont des fonctions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans \mathbb{R} , alors

$$\mathbb{E}[f(X_n) \cdot g(Y_n)] = \mathbb{E}[f(X_n)] \cdot \mathbb{E}[g(Y_n)].$$

- On peut écrire

$$\mathbb{P}(X_n \text{ et } Y_n \text{ sont premiers entre eux}) = \mathbb{E}[(1 - B_{p_1}^n) \cdot \dots \cdot (1 - B_{p_k}^n)],$$

où $p_1 < \dots < p_k$ sont les nombres premiers $p \leq n$, et B_p^n est la variable aléatoire qui vaut 1 si p divise X_n et Y_n , et 0 sinon. Pour faire sens du membre de gauche, remarquez qu'on peut l'écrire $\mathbb{P}((X_n, Y_n) \in A)$, avec

$$A = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 : i \text{ et } j \text{ sont premiers entre eux}\}.$$

Pour faire sens du membre de droite, remarquez qu'on peut l'écrire $\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)]$ pour une certaine fonction $f : \llbracket 1, n \rrbracket^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En développant le produit, on obtient l'expression

$$\mathbb{P}(X_n \text{ et } Y_n \text{ sont premiers entre eux}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} \mathbb{E}[B_{p_{i_1}}^n \cdot \dots \cdot B_{p_{i_k}}^n].$$

- Si p et q sont des nombres premiers distincts, alors p divise n et q divise n si et seulement si pq divise n .

- On a

$$\prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \rightarrow \frac{6}{\pi^2} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où le produit porte sur les nombres premiers $p \leq n$.

2.14 Résolution de l'Équation Logistique avec la Méthode d'Euler — Virginia Bolelli

Considérez l'équation différentielle logistique, un type d'équation qui décrit la croissance d'une population limitée par les ressources disponibles. Sa forme générale est :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right) & \text{pour } t \in [t_0, t_F] \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

Où :

- P est la population en fonction du temps t .
- r est le taux de croissance de la population : une mesure indiquant à quelle vitesse une population augmente dans le temps.
- K est la capacité de charge de l'environnement : elle représente le nombre maximal d'individus d'une population qui peuvent être soutenus sans causer de dommages à l'écosystème ou sans dépasser la capacité de régénération des ressources naturelles.

Exercices proposés :

- Implémentez un algorithme pour la résoudre numériquement.
- Analyse des paramètres :
 - Comment la capacité de charge K affecte-t-elle la croissance de la population ?
 - Quelles sont les implications d'avoir un taux de croissance r négatif ?
 - Comment le comportement de la population varie-t-il en fonction de K et r ?

Step1 : Méthode d'Euler Explicite pour les EDOs

- Dérivée comme limite du rapport d'incrément :

$$\frac{dP}{dt} = P'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}.$$

(Ou Taylor ?)

- Si h est suffisamment petit :
- Introduction à l'algorithme : on commence avec t_0 et $t_1 = t_0 + h$:

$$P(t_1) = P(t_0) + h \cdot P'(t_0).$$

On généralise :

$$\begin{cases} P(t_{j+1}) = P(t_j) + h \cdot P'(t_j) \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

Step 2 : Implémentation du Code (en Python ?)

Comment implémenter le code ?

- Choix de h :

$$h = \frac{t_F - t_0}{N},$$

où N est le nombre de pas que je veux faire pour passer du point initial au point final.

- Pseudocode :

```
# Définition de l'équation logistique
def logistic_eq(P, r, K):
    return r * P * (1 - (P / K))

# Méthode d'Eulero pour résoudre l'équation différentielle :
def euler_method(func, P0, r, K, h, n):
    P_values = [P0]
    for i in range(n):
        P_new = P_values[-1] + h * func(P_values[-1], r, K)
        P_values.append(P_new)
    return P_values

# Appel de l'algorithme :
K = 1;
r = 0.5;
t0 = 0;
tf = 100;
P0 = 0;
N = 50;
h = (tf-t0)/N;
P = euler_method(logistic_eq, P0, r, K, h, n)
```

$$\begin{cases} P(j+1) = P(j) + h \cdot r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right) \text{ pour } j = 1 \dots N-1 \\ P(1) = P_0 \end{cases}$$

Step 3 : Analyse des résultats

Questions à poser :

- Si on augmente le nombre de pas N , alors h devient plus petit. Comment cela affecte-t-il le résultat de la solution ? Comparer avec la solution exacte, donnée par :

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

- Analyse du comportement de l'équation lorsque les paramètres K et r changent

Le diamant Aztèque et son cercle arctique

Sofia Tarricone

Institut de Physique Théorique, CEA Paris-Saclay

π -Day

CPES Lycée Louis Le Grand, Paris

14/03/2024



1 Les pavages du diamant Aztèque

2 Compter les pavages

3 A quoi ressemble un pavage aléatoire ?

Outline

1 Les pavages du diamant Aztèque

2 Compter les pavages

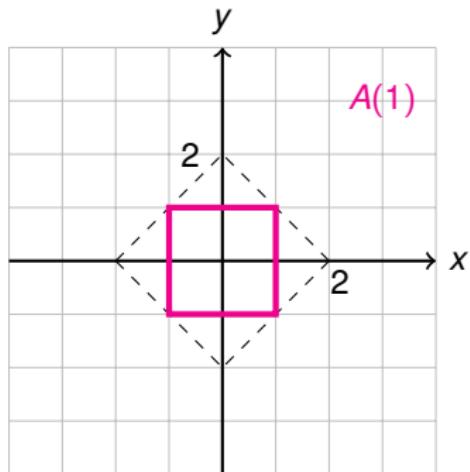
3 A quoi ressemble un pavage aléatoire ?

Le diamant Aztèque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$A(n)$, le **diamant Aztèque de taille n** , est la figure géométrique du plan obtenue en considérant tous les carrés $[a, a + 1] \times [b, b + 1]$, $a, b \in \mathbb{Z}$ contenus dans le diamant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q: } |x| + |y| \leq n + 1\}.$$



Remarque Le nombre de carrés dans $A(n)$ est donné par

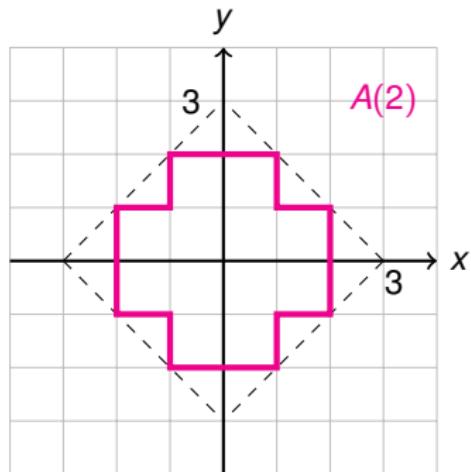
$$4 \sum_{k=1}^n k = 2n(n + 1).$$

Le diamant Aztèque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$A(n)$, le **diamant Aztèque de taille n** , est la figure géométrique du plan obtenue en considérant tous les carrés $[a, a + 1] \times [b, b + 1]$, $a, b \in \mathbb{Z}$ contenus dans le diamant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q: } |x| + |y| \leq n + 1\}.$$



Remarque Le nombre de carrés dans $A(n)$ est donné par

$$4 \sum_{k=1}^n k = 2n(n + 1).$$

Les pavages

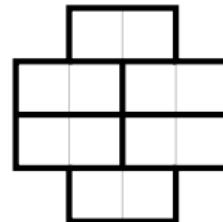
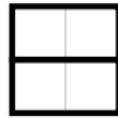
Nous considérons des dominos rectangulaires de tailles 2×1 ou 1×2



Un **pavage** de $A(n)$ est un ensemble de tels dominos tel que :

- $A(n)$ est entièrement recouvert par les dominos;
- les dominos ne se superposent pas.

Exemple Les pavages horizontaux pour $n = 1$ et 2 .



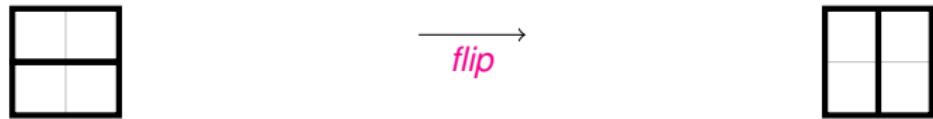
Nous définissons $a_n = \#\{\text{pavages de } A(n)\}$.

Problème de combinatoire enumerative

Pour chaque n , combien vaut a_n ?

Les premiers calculs

Pour $n = 1$ nous avons exactement 2 pavages possibles, $a_1 = 2$.

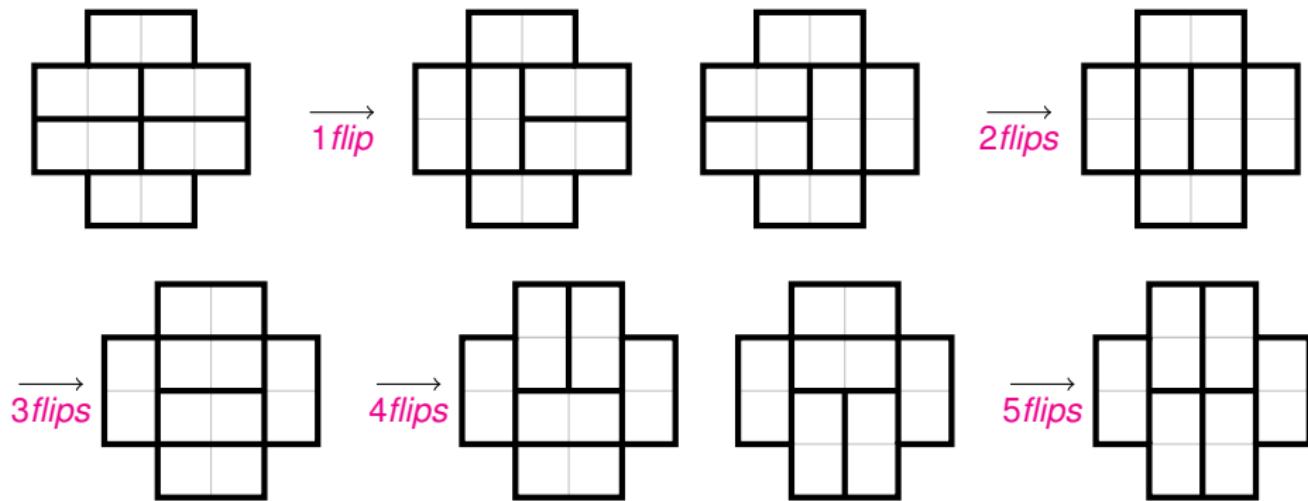


Les premiers calculs

Pour $n = 1$ nous avons exactement 2 pavages possibles, $a_1 = 2$.

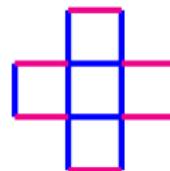
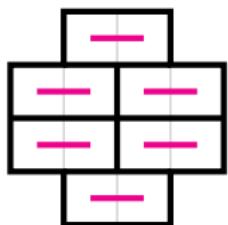


Pour $n = 2$ nous avons exactement 8 pavages possibles, $a_2 = 8 = 2^3$.



Lien avec les modèles de dimers

Les pavages de $A(n)$ sont en bijection avec les **couplages parfaits** du graphe planaire associé (par dualité) à $A(n)$.



L'ensemble des couplages parfaits d'un graphe donné est appelé modèle de dimers. Le modèle de dimers pour un sous-graphe rectangulaire de \mathbb{Z}^2 est connu depuis les travaux de Kenyon des années '60.

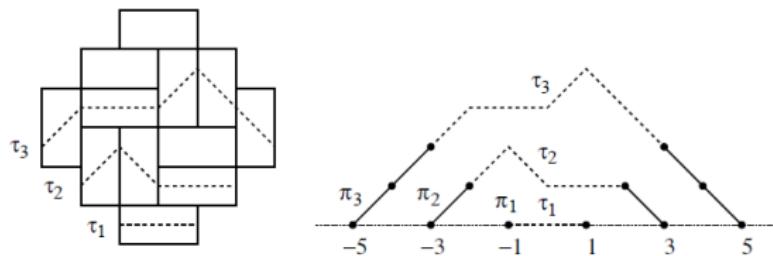
Remarque Les modèles de dimers sont considérés comme des modèles de physique statistique, ils modélisent la répartition de molécules di-atomiques à la surface d'un cristal.

Bijection avec les chemins de Schroder non-intersectant

En 2004 Eu et Fu ont prouvé que les pavages de $A(n)$ sont en bijection avec l'ensemble des n -uplets (π_1, \dots, π_n) de grand chemins de Schroder tels que

- pour tout $i \neq j$, π_i et π_j ne s'intersectent pas;
- Pour $i = 1, \dots, n$ chaque

π_i va dès $(-2i + 1, 0)$ à $(2i - 1, 0)$.



From *A simple proof of the Aztec diamond theorem* by Eu et Fu.

Outline

1 Les pavages du diamant Aztèque

2 Compter les pavages

3 A quoi ressemble un pavage aléatoire ?

Le résultat de Elkies, Kuperberg, Larsen et Propp

Pour $x, q \in \mathbb{R}_+$ des paramètres, nous avons la fonction qui compte les pavages raffinés

$$\text{AD}(n; x, q) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} \prod_{d \in P} x^{v(d)} q^{r(d)},$$

où pour chaque domino d dans un pavage de $A(n)$, nous définissons les fonctions

$$v(d) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0, & \text{si } d \text{ est horizontale.} \end{cases} \quad r(d) = \begin{cases} (-1)^{i+j+n} (i+n+1), & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0 & \text{si } d \text{ est horizontale.} \end{cases}$$

Remarque $\text{AD}(n; x = 1, q = 1) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} 1 = a_n$.

Théorème (Elkies, Kuperberg, Larsen, Propp, 1992)

Pour tout n , la fonction $\text{AD}(n; x, q)$ est donnée par

$$\text{AD}(n; x, q) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + xq^{2k+1})^{n-k}$$

Corollaire Pour tout n , le nombre de pavages de $A(n)$ correspond à

$$a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Le résultat de Elkies, Kuperberg, Larsen et Propp

Pour $x, q \in \mathbb{R}_+$ des paramètres, nous avons la fonction qui compte les pavages raffinés

$$\text{AD}(n; x, q) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} \prod_{d \in P} x^{v(d)} q^{r(d)},$$

où pour chaque domino d dans un pavage de $A(n)$, nous définissons les fonctions

$$v(d) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0, & \text{si } d \text{ est horizontale.} \end{cases} \quad r(d) = \begin{cases} (-1)^{i+j+n}(i+n+1), & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0 & \text{si } d \text{ est horizontale.} \end{cases}$$

Remarque $\text{AD}(n; x = 1, q = 1) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} 1 = a_n$.

Théorème (Elkies, Kuperberg, Larsen, Propp, 1992)

Pour tout n , la fonction $\text{AD}(n; x, q)$ est donnée par

$$\text{AD}(n; x, q) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + xq^{2k+1})^{n-k}$$

Corollaire Pour tout n , le nombre de pavages de $A(n)$ correspond à

$$a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Idée de la preuve

Lemme Les fonctions qui comptent les pavages raffinés de taille n et $n - 1$ sont liés par la relation

$$\text{AD}(n; x, q) = (1 + xq)^n \text{AD}(n - 1; xq^2, q).$$



Par induction sur n , en utilisant cette relation, la formule explicite pour $\text{AD}(n; x, q)$ est ensuite prouvée (voir atelier).

Remarque Pour $x = q = 1$ nous avons que

$$a_n = 2^n a_{n-1}.$$

L'idée fondamentale derrière cette formule est de pouvoir construire de façon recursive des pavages de taille n à partir d'un pavage de taille $n - 1$.

Algorithme de Shuffling

Pour un pavage donné de $A(n - 1)$, nous construisons un pavage de $A(n)$.

- A partir du point au milieu du sommet de $A(n - 1)$, nous marquons tous les points du réseau à distance paire de celui ci.
- Sur chaque domino, nous posons une flèche, en direction du point marqué du réseau qui tombe au milieu de son côté de taille 2.
- Nous regardons tout les carrés de taille 2×2 dans $A(n - 1)$: si un est composé de deux dominos ayant des flèches en direction du même point nous éliminons les dominos, ce sont des *mauvais* paires.
- Nous mouvons simultanément en direction de leur flèche tout les autres dominos de un.

!!! Les dominos sont ainsi placés à l'intérieur de $A(n)$. La place vide laissée est composée de

$$2n(n + 1) - 2n(n - 1) = 4n$$

carrés disposés en n carrés de taille 2×2 .

- Nous remplissons ces derniers avec n *bon* paires de dominos, en prenant une paire verticale ou horizontale avec probabilité $1/2$.

<https://fedimser.github.io/adt/adt.html>

Outline

- 1 Les pavages du diamant Aztèque
- 2 Compter les pavages
- 3 A quoi ressemble un pavage aléatoire ?

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

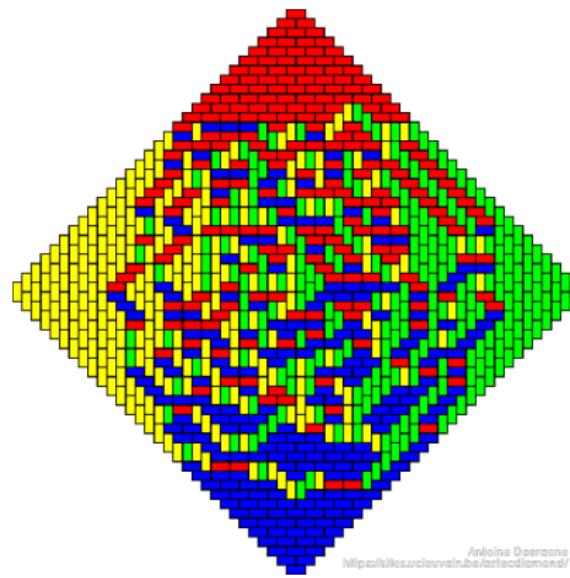
$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



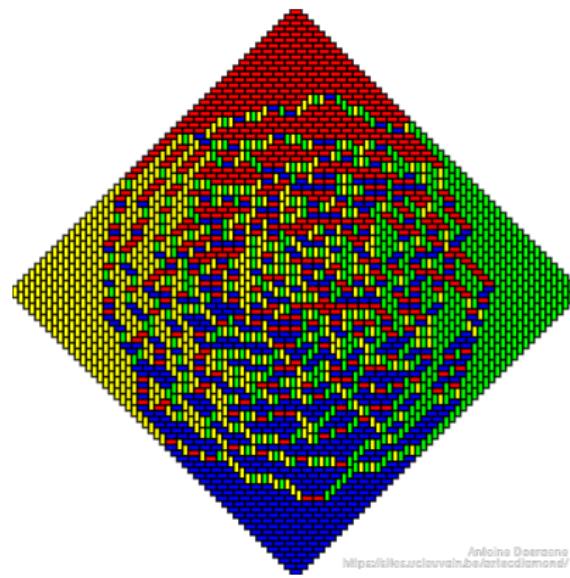
Images générées par Antoine Doeraene <https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html>

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



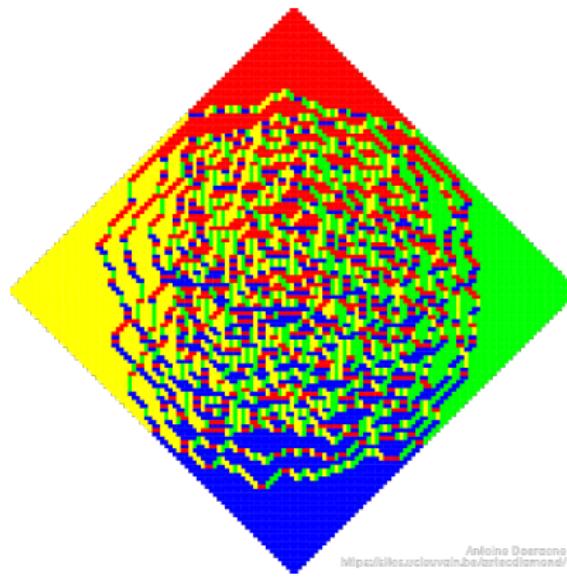
Images générées par Antoine Doeraene <https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html>

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



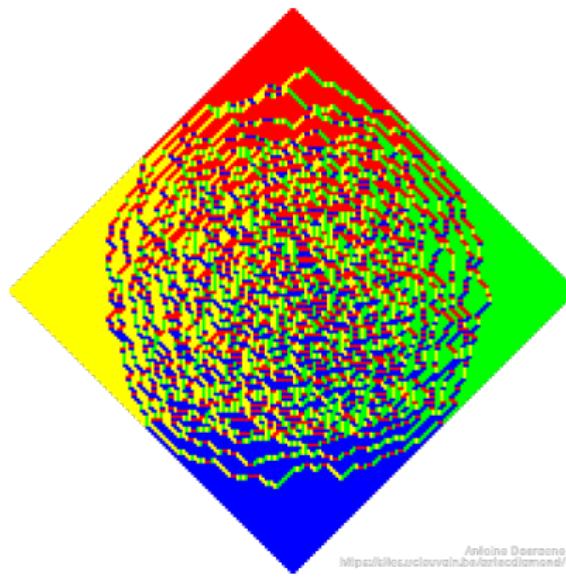
Images générées par Antoine Doeraene <https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html>

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



Images générées par Antoine Doeraene <https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html>

Le théorème du cercle articqué

Le cercle inscrit dans le diamant Aztèque divise

- la zone **gelée**, donnée par les quatres coins du diamant, dans lesquels il y a un unique type de domino,
- la zone **témperée**, où tous les types de dominos apparaissent.

Et ce phénomène arrive avec probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Théorème (Jockusch, Propp, Shor, 1995)

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout n assez grand, tous sauf une fraction ϵ des pavages de $A(n)$ aurant une zone témperée dont la frontière reste uniformement à distance ϵn de l'intérieur du cercle inscrit.

Merci de votre attention !

Je vous attend à l'atelier...

Références

Articles :

- *Alternating-Sign Matrices and Domino Tilings (Part I-II)* par Elkies, Kuperberg, Larsen, Propp, <https://arxiv.org/abs/math/9201305>
- *Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem* par Jockusch, Propp, Shor <https://arxiv.org/abs/math/9801068>
- *A simple proof of the Aztec diamond theorem* par Eu, Fu <https://arxiv.org/abs/math/0412041>

Vidéos :

- Cours d'une école de recherche au CIRM *Le diamant Aztèque* par Sylvie Corteel, https://www.youtube.com/watch?v=xCOXF_AMMow
- Vidéo de vulgarisation *The ARCTIC CIRCLE THEOREM or Why do physicists play dominoes?* par Mathologer <https://www.youtube.com/watch?v=Yy7Q8IWNfHM>

Codes :

- <https://fedimser.github.io/adt/adt.html>
- <https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html>

La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

Tommaso Rossi

Pi Day au Lycée Louis le Grand

Mars 14, 2024



**SORBONNE
UNIVERSITÉ**

inria

Plan de l'exposé

1 Le problème de Didon

- L'histoire et légende de Didon

2 La solution au problème de Didon

3 La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

- Relèvement du problème dans \mathbb{R}^3
- Le groupe de Heisenberg
- La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

Plan de l'exposé

1 Le problème de Didon

- L'histoire et légende de Didon

2 La solution au problème de Didon

3 La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

- Relèvement du problème dans \mathbb{R}^3
- Le groupe de Heisenberg
- La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

La reine Didon

- Au début de 9ème siècle A.C. naît Didon, princesse de Tyr (actuel Liban).
- ~ 820 A.C. : Au mort du roi de Tyr, son frère Pygmalion assassine son époux afin de prendre le pouvoir. Didon, avec une suite nombreuse, s'enfuit vers l'Afrique du Nord.
- 814 A.C. : Didon atteint Byrsa (proche de l'actuel Tunis) et demande asile aux autochtones. Elle obtient pacifiquement des terres pour s'y établir, par un accord avec le seigneur local. Mais, on ne lui concède que ce que pourrait couvrir la peau d'un bœuf.



Figure: Didon abandonnée - A. Sacchi
1599–1661

La construction de Chartage - 814 A.C.

- Didon découpe la peau en si fines lanières qu'elle obtient, bout à bout, une corde de longueur de près de 4 km. Avec la corde ainsi formée, elle encercle son territoire et fonde la très célèbre ville de **Carthage**.

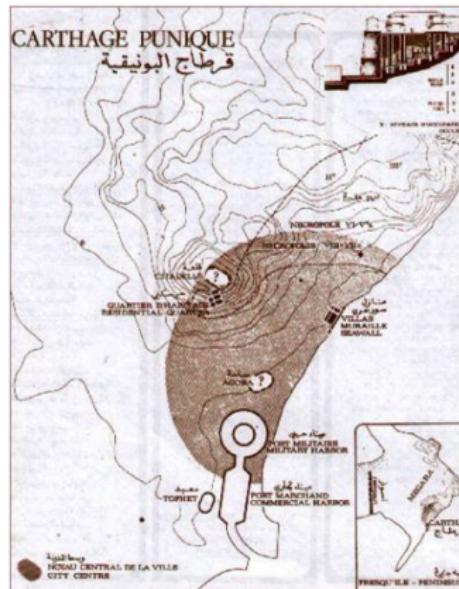


Figure: Carte de la Carthage punique (coloriée en gris)

Le problème de Didon

En formant un **arc de cercle** plutôt qu'un triangle, un rectangle, un carré ou tout autre forme géométrique sans point double, Didon avait donc admis la solution au problème isopérimétrique suivant :

Soit L une ligne donnée. De toutes les courbes, sans points double, dont les points initial et final sont sur L , et de longueur donnée, trouver celle qui (avec L) entoure l'aire la plus grande.

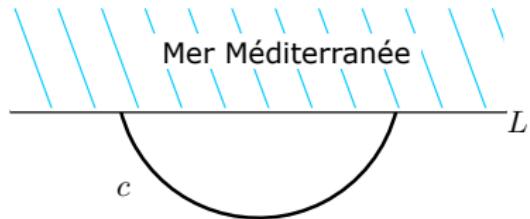
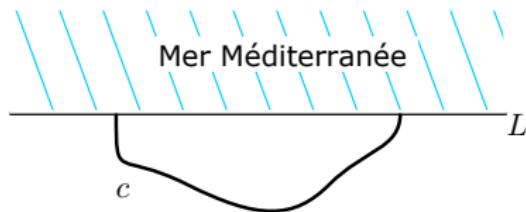


Figure: Les deux courbes ont la même longueur, mais l'aire entourée par la seconde est plus grande. Ici, L représente le littoral méditerranéen.

Plan de l'exposé

1 Le problème de Didon

- L'histoire et légende de Didon

2 La solution au problème de Didon

3 La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

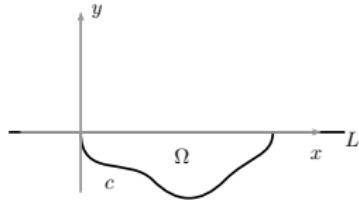
- Relèvement du problème dans \mathbb{R}^3
- Le groupe de Heisenberg
- La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

La formalisation du problème de Didon

Soit $L = \{y = 0\}$ l'axe des x et soit $\ell \in (0, +\infty)$. Le problème de Didon est un **problème de maximisation sous contrainte** : trouver une courbe $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$\begin{cases} c(0), c(1) \in L, \\ \text{Longeur de } c = \ell; \\ \text{Aire obtenue entre } c \text{ et } L \longrightarrow \max \end{cases} \quad (D)$$

De manière explicite, soit $c(t) = (x(t), y(t))$ une paramétrisation de la courbe telle que $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Alors, on a :



- $\ell(c) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)} \, ds;$
- $\mathcal{A}(c) = \int_{\Omega} dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s)) \, ds.$

Figure: La région Ω a comme contour c et L .

La solution du problème de Didon - I

On utilise des techniques de calcul des variations pour trouver la solution à (D):

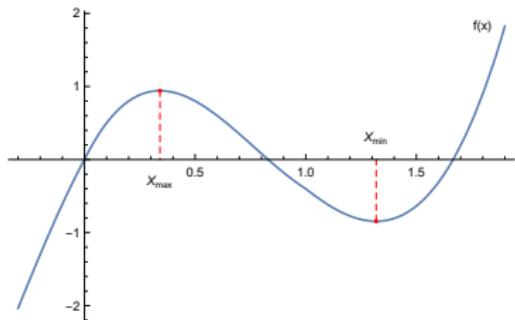
- ① On suppose que c est une solution à (D) : $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe telle que $c(0) = (0, 0)$, $c(1) \in L$ et

$$\mathcal{A}(c) = \max_{\tilde{c}} \mathcal{A}(\tilde{c}) \quad \text{sous la contrainte} \quad \ell(c) = \ell,$$

- ② Alors c est point critique de la **fonction lagrangienne** de ce problème, donnée par

$$\mathcal{L}(x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s)) := \underbrace{\frac{1}{2}(x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s))}_{\text{intégrande de } \mathcal{A}(\cdot)} + \underbrace{\lambda \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)}}_{\text{intégrande de } \ell(\cdot)},$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur de Lagrange.



La fonction f a deux points critiques x_{\min} et x_{\max} . Ils sont tels que

$$f'(x_{\min}) = f'(x_{\max}) = 0.$$

La solution du problème de Didon - II

- ➃ Comme c est point critique de \mathcal{L} , on a :

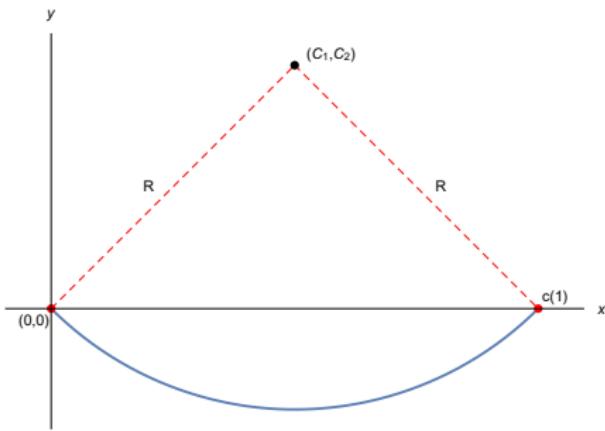
$$\nabla \mathcal{L}(c) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{équations d'Euler-Lagrange.}$$

- ➄ Nous résolvons les équations d'Euler-Lagrange associées à \mathcal{L} et nous obtenons qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{d}{dt} \left[(x(t) - C_1)^2 + (y(t) - C_2)^2 \right] = 0.$$

Donc, on trouve une constante $R > 0$ telle que

$$(x(t) - C_1)^2 + (y(t) - C_2)^2 = R^2.$$



\rightsquigarrow Cela signifie que $c(t) = (x(t), y(t))$ paramètre un **arc de cercle** de centre (C_1, C_2) et rayon R .

Plan de l'exposé

1 Le problème de Didon

- L'histoire et légende de Didon

2 La solution au problème de Didon

3 La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

- Relèvement du problème dans \mathbb{R}^3
- Le groupe de Heisenberg
- La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

Relever le problème dans \mathbb{R}^3 - I

But : “relever” le problème de Didon dans \mathbb{R}^3 et définir la structure géométrique associée à ce problème.

Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec composantes $c(t) = (x(t), y(t))$ et supposons $c(0) = (0, 0)$, $c(1) = (x_1, y_1)$. On rappel que

$$\mathcal{A}(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{y}(s)x(s) - \dot{x}(s)y(s)) \, ds$$

Ensuite, nous pouvons relever le problème dans \mathbb{R}^3 , en définissant la composante additionnelle de c comme suit

$$z(\textcolor{red}{t}) := \mathcal{A}(c_{|[0, \textcolor{red}{t}]}) = \frac{1}{2} \int_0^{\textcolor{red}{t}} (\dot{y}(s)x(s) - \dot{x}(s)y(s)) \, ds.$$

La courbe $\gamma(t) := (x(t), y(t), z(t))$ a la propriété que $z(t)$ est l'aire de la région dans \mathbb{R}^2 délimitée par la projection $(x(s), y(s))$ et la ligne passant par l'origine et $(x(t), y(t))$.

~~> Cette procédure nous permet de définir une géométrie non-euclidienne sur \mathbb{R}^3 .

Relever le problème dans \mathbb{R}^3 - II

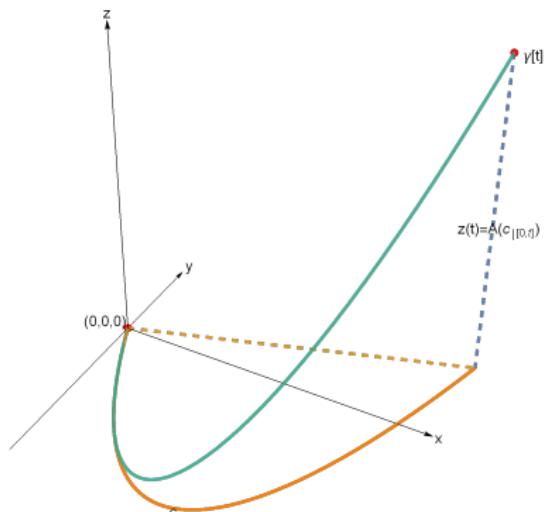
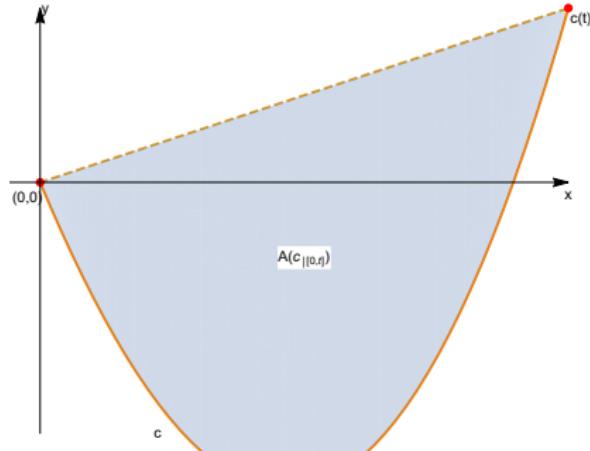


Figure: Une courbe quelconque en \mathbb{R}^2 est relevée uniquement à une courbe en \mathbb{R}^3 .

Relever le problème dans \mathbb{R}^3 - III

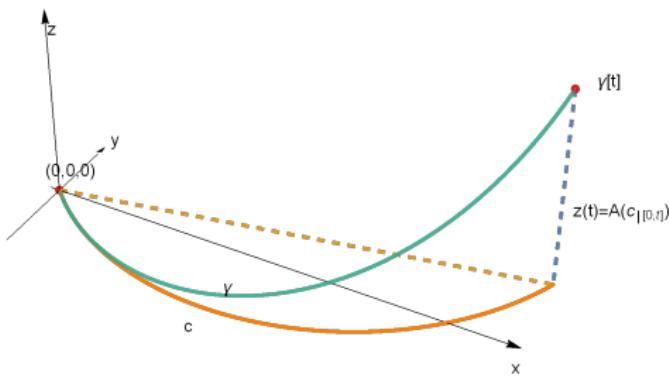
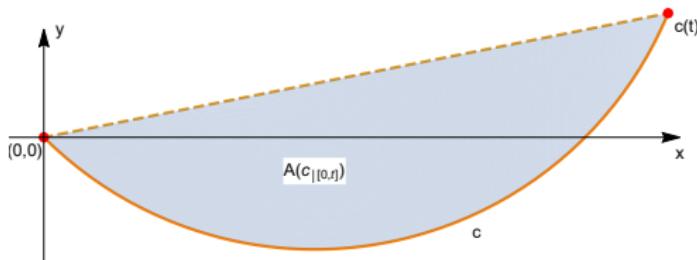


Figure: Un arc de cercle est relevé à un morceau de spirale.

Le groupe de Heisenberg - I

Nous définissons une géométrie **non-euclidienne** sur \mathbb{R}^3 . Considérons la famille de plans donnée par

$$\mathcal{D}_{(x,y,z)} := \text{span} \{X(x,y,z), Y(x,y,z)\},$$

où X et Y sont deux vecteurs dans \mathbb{R}^3 définis par

$$X(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix}, \quad Y(x,y,z) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

\mathcal{D} est appelée **distribution** et elle a toujours dimension 2.

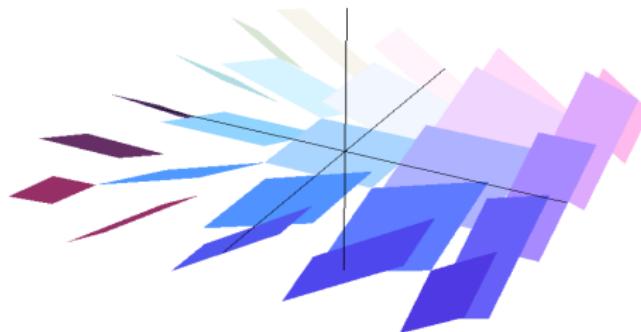


Figure: La distribution au points du plan $\{z = 0\}$.

Le groupe de Heisenberg - II

Nous définissons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathcal{D} , en déclarant X et Y orthonormés. Donc, pour tout $v, w \in \mathcal{D}_{(x,y,z)}$, on a

$$v = v_1 X(x, y, z) + v_2 Y(x, y, z), \quad w = w_1 X(x, y, z) + w_2 Y(x, y, z),$$

ainsi que

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

On ne peut calculer le produit scalaire que pour les vecteurs sur \mathcal{D} .

Par exemple, le vecteur $(0, 0, 1)^T$ n'appartient pas à \mathcal{D} et donc on ne peut pas évaluer sa norme.

Définition. Le **groupe de Heisenberg** \mathbb{H} est \mathbb{R}^3 équipé de la distribution \mathcal{D} et du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathcal{D} .

~~> Le groupe de Heisenberg est un exemple de **géométrie sous-riemannienne**.

Les courbes admissibles en $\mathbb{H} - I$

Définition. Nous disons qu'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est **admissible**, si et seulement si elle est **tangente** à $\mathcal{D}_{\gamma(t)}$, c'est-à-dire :

$$\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

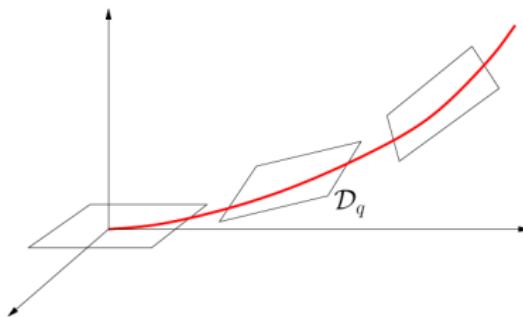


Figure: Une courbe admissible est tangente à la distribution

Rappel que le produit scalaire n'est défini que sur la distribution.

On ne peut que évaluer la vitesse des courbes admissibles!

Les courbes admissibles en \mathbb{H} - II

Soit maintenant $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ son relèvement. Alors, $\gamma(t)$ est **admissible**. En effet, on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{1}{2} (\dot{y}(t)x(t) - \dot{x}(t)y(t)) \right) = \dot{x}(t)X(\gamma(t)) + \dot{y}(t)Y(\gamma(t)).$$

Une courbe est admissible si et seulement si elle est le relèvement d'une courbe $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^3 .

En rappelant que X, Y sont orthonormés, la vitesse de $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}.$$

Alors, la longueur d'une courbe admissible γ en \mathbb{H} est la même que celle de sa projection c en \mathbb{R}^2 , notamment :

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \ell(c).$$

$$\ell_{\mathbb{R}^3}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \neq \ell_{\mathbb{H}}(\gamma).$$

La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

Théorème

Une courbe admissible $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est la courbe **la plus courte** de $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ à $\gamma(1) = (x(1), y(1), z(1))$ dans \mathbb{H} si et seulement si sa projection $c(t) = (x(t), y(t))$ est la solution du **problème (dual) de Didon** pour les courbes joignant $(0, 0)$ et $c(1) = (x(1), y(1))$ avec une aire donnée de $z(1)$.

- Le problème dual de Didon : soit L une ligne donnée. De toutes les courbes, sans points doubles, dont les points initial et final sont sur L , et telle que elle entoure une aire donnée, trouver la plus courte.
- Les courbes les plus courtes entre deux points donnés sont appelées **géodésiques**. Dans \mathbb{R}^3 , les géodésiques sont des lignes droites. Dans la géométrie non-euclidienne de \mathbb{H} , les géodésiques sont **spirales**.

Alors, le théorème dit que :

$$\text{Géodésiques dans } \mathbb{H} \iff \text{Solutions au problème de Didon}$$

Merci pour l'attention !

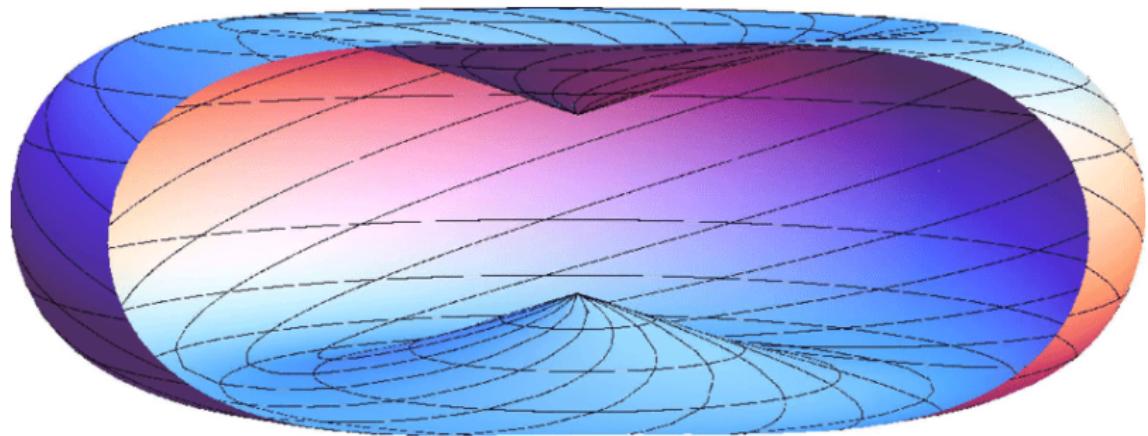


Figure: La boule unité du groupe de Heisenberg

Voyage en probabilités : percolation et géométrie aléatoire

Guillaume Blanc

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay

π day, Lycée Louis-le-Grand (3.14.2024)

Au programme

- 1 Percolation par arêtes dans \mathbb{Z}^d
- 2 Percolation de premier passage
- 3 Géométrie aléatoire avec des processus de Poisson de routes

Brève histoire des probabilités

Théorie mathématique née de la modélisation de phénomènes aléatoires (e.g, jeux de hasard).

Quelques dates clés :

- Correspondance entre Pascal et Fermat autour des problèmes de dés du chevalier de Méré (1654).
- Théorie de la mesure, intégration de Lebesgue (1901).
- Axiomatique de Kolmogorov (1933).

Une façon de définir la discipline : étude des variables aléatoires.

Variables aléatoires

Soit E un ensemble. Une **variable aléatoire** à valeurs dans E est une fonction X d'un ensemble “abstrait” Ω vers E .

Plutôt que de voir X comme la fonction $\omega \in \Omega \mapsto X(\omega)$, on voit X comme un élément “aléatoire” de E , et on considère les probabilités $\mathbb{P}(X \in B)$, pour $B \subset E$.

Conformément à l'intuition, ces nombres vérifient :

- $\mathbb{P}(X \in B) \in [0, 1]$ pour tout $B \subset E$,
- $\mathbb{P}(X \in \emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(X \in E) = 1$,
- si $B_1, B_2 \subset E$ sont disjoints, alors

$$\mathbb{P}(X \in B_1 \sqcup B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1) + \mathbb{P}(X \in B_2).$$

Ils caractérisent la **loi** de X .

Variables aléatoires

Pour travailler avec une variable aléatoire X , on commence par définir sa loi en prescrivant les probabilités $\mathbb{P}(X \in B)$, pour $B \subset E$.

Pour n'importe quelle fonction $\mu : B \subset E \mapsto \mu(B) \in [0, 1]$ qui vérifie :

- $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(E) = 1$,
- si $B_1, B_2 \subset E$ sont disjoints, alors

$$\mu(B_1 \sqcup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2),$$

on peut construire une variable aléatoire X de loi μ , i.e., telle que $\mathbb{P}(X \in B) = \mu(B)$ pour tout $B \subset E$.

Exemple

E est un ensemble fini, et

$$\mu(B) = \frac{\#B}{\#E} \quad \text{pour tout } B \subset E.$$

Si X est une variable aléatoire de loi μ , alors

$$\mathbb{P}(X = x) = \mu\{x\} = \frac{1}{\#E} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

On dit que X est de loi **uniforme** sur E .

- Lorsque $E = \{1, \dots, 6\}$, on peut penser à X comme le résultat d'un tirage de dé.
- Lorsque $E = \{0, 1\}$, on peut penser à X comme le résultat d'un tirage à pile ou face.

Exemple

$E = \{0, 1\}$, et

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu\{1\} = p, \quad \mu\{0\} = 1 - p, \quad \text{et} \quad \mu\{0, 1\} = 1,$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre.

Si X est une variable aléatoire de loi μ , alors

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mu\{1\} = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mu\{0\} = 1 - p.$$

On dit que X est de loi de Bernoulli de paramètre p .

On peut penser à X comme le résultat d'un tirage à pile ou face, avec une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p , et sur face avec probabilité $1 - p$. (Lorsque $p = 1/2$, on retrouve l'exemple précédent.)

Indépendance

E est un ensemble fini, et

$$\mu(B) = \frac{\#B}{\#E^2} \quad \text{pour tout } B \subset E^2 = \{(x_1, x_2) ; x_1, x_2 \in E\}.$$

Si (X_1, X_2) est une variable aléatoire de loi μ , alors pour tous $B_1, B_2 \subset E$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \in B_1 ; X_2 \in B_2) &= \mathbb{P}((X_1, X_2) \in B_1 \times B_2) \\ &= \mu(B_1 \times B_2) \\ &= \frac{\#B_1 \cdot \#B_2}{\#E^2} = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in B_2). \end{aligned}$$

On dit que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont **indépendantes**.

Suites de variables aléatoires indépendantes

Pour n'importe quelle fonction $\mu : B \subset E \mapsto \mu(B) \in [0, 1]$ qui vérifie :

- $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(E) = 1$,
- Si $B_1, B_2 \subset E$ sont disjoints, alors

$$\mu(B_1 \sqcup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2),$$

on peut construire une suite (X_1, X_2, \dots) de variables aléatoires **indépendantes** de loi μ , i.e, telles que $\mathbb{P}(X_n \in B) = \mu(B)$ pour tout $B \subset E$. On a alors, pour tous $B_1, \dots, B_n \subset E$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in B_1 ; \dots ; X_n \in B_n) &= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n) \\ &= \mu(B_1) \cdot \dots \cdot \mu(B_n).\end{aligned}$$

Exemple

$E = \{0, 1\}$, et

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu\{1\} = p, \quad \mu\{0\} = 1 - p, \quad \text{et} \quad \mu\{0, 1\} = 1,$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre.

Si (X_1, X_2, \dots) est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ , i.e, de loi de Bernoulli de paramètre p , alors on peut penser à (X_1, X_2, \dots) comme le résultat d'une infinité de tirages à pile ou face, avec une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p , et sur face avec probabilité $1 - p$.
On a, par exemple :

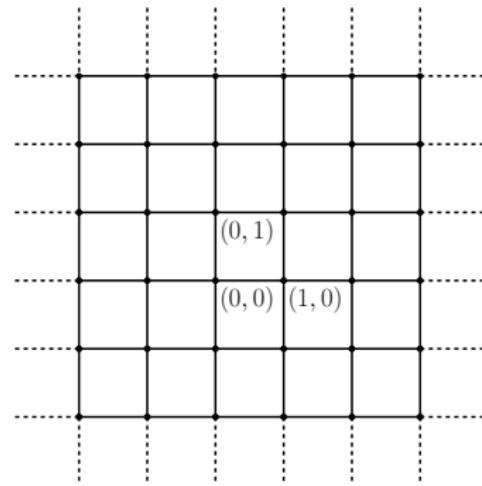
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1 ; \dots ; X_n = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= p \cdot \dots \cdot p = p^n. \end{aligned}$$

Des questions ?

- 1 Percolation par arêtes dans \mathbb{Z}^d
- 2 Percolation de premier passage
- 3 Géométrie aléatoire avec des processus de Poisson de routes

Le modèle

On se place sur le **réseau hypercubique** \mathbb{Z}^d , où $d \in \mathbb{N}^*$.

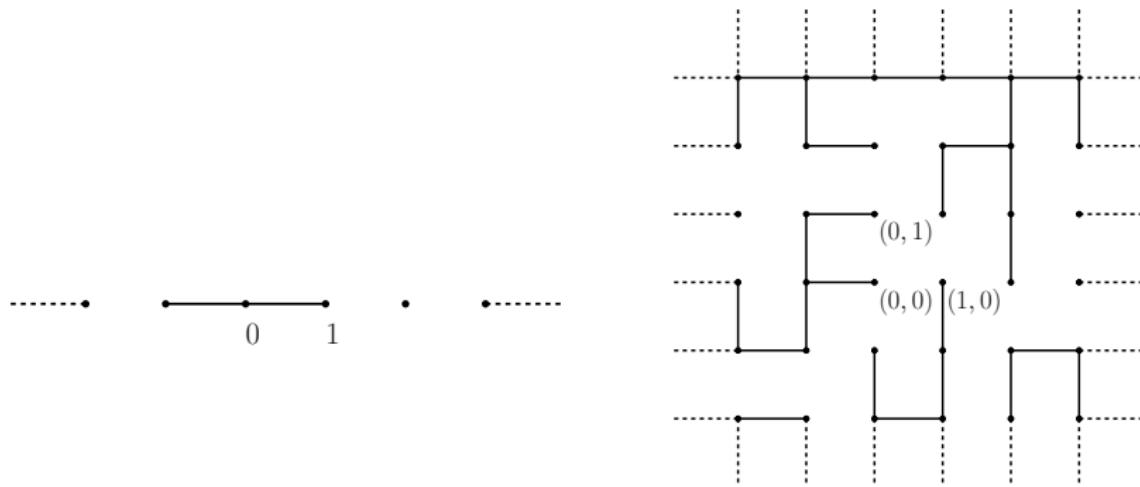
 \mathbb{Z}  \mathbb{Z}^2

Le modèle

Pour chaque arête e de \mathbb{Z}^d , on garde e avec probabilité p , et on l'enlève avec probabilité $1 - p$, où $p \in [0, 1]$ est un paramètre du modèle, et ce indépendamment des autres arêtes.

Le modèle

Pour chaque arête e de \mathbb{Z}^d , on garde e avec probabilité p , et on l'enlève avec probabilité $1 - p$, où $p \in [0, 1]$ est un paramètre du modèle, et ce indépendamment des autres arêtes.



Le modèle

Formellement, on se donne une famille $(X_e, e \text{ arête de } \mathbb{Z}^d)$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$, de loi donnée par

$$\mathbb{P}_p(X_e = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_p(X_e = 0) = 1 - p.$$

Pour chaque arête e de \mathbb{Z}^d , on garde e si $X_e = 1$, et on l'enlève si $X_e = 0$.

Le modèle

Formellement, on se donne une famille $(X_e, e \text{ arête de } \mathbb{Z}^d)$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$, de loi donnée par

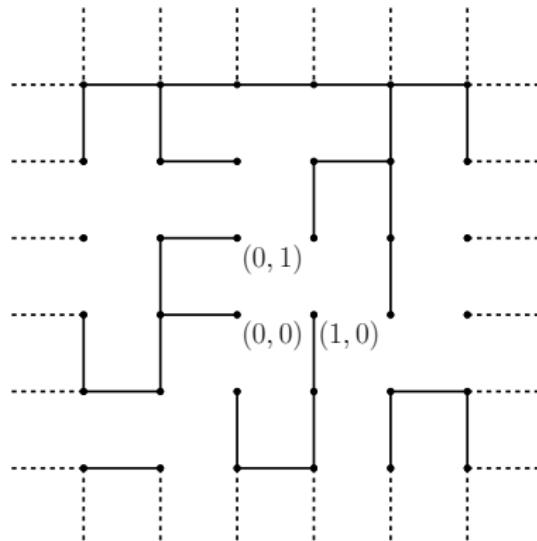
$$\mathbb{P}_p(X_e = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_p(X_e = 0) = 1 - p.$$

Pour chaque arête e de \mathbb{Z}^d , on garde e si $X_e = 1$, et on l'enlève si $X_e = 0$.

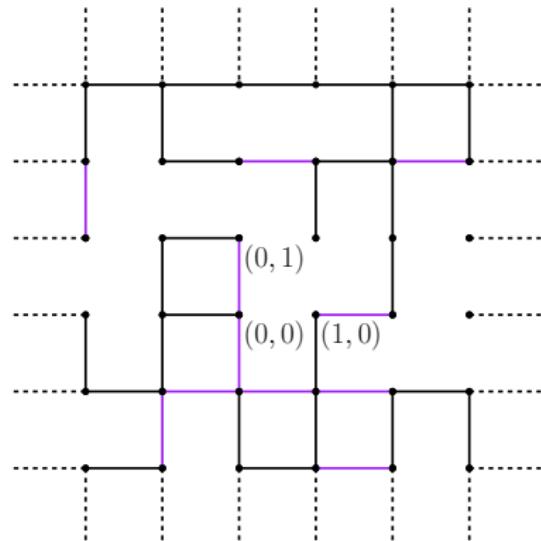
Modèle introduit par Broadbent et Hammersley en 1957.

La question

Intuitivement, plus p est grand, plus la composante connexe de l'origine a de chances d'être grande.



$$p = 1/2$$



$$p = 2/3$$

Le modèle

Questions(s) : en fonction du paramètre p , existe-t-il une composante connexe **infinie** ?

Le modèle

Questions(s) : en fonction du paramètre p , existe-t-il une composante connexe **infinie** ? Quelle est la probabilité

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$$

que la composante connexe de l'origine soit infinie ?

Le modèle

Questions(s) : en fonction du paramètre p , existe-t-il une composante connexe **infinie** ? Quelle est la probabilité

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$$

que la composante connexe de l'origine soit infinie ?

Proposition

Pour tout $p \in [0, 1]$, on a

$$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) \in \{0, 1\}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 1 \iff \theta(p) > 0.$$

Paramètre critique et transition de phase

La fonction $\theta : p \in [0, 1] \mapsto \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$ est croissante, et on a

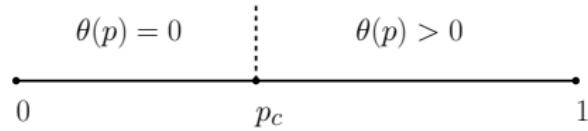
$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(1) = 1.$$

Paramètre critique et transition de phase

La fonction $\theta : p \in [0, 1] \mapsto \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$ est croissante, et on a

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(1) = 1.$$

On a donc le diagramme suivant :



où

$$p_c = \inf\{p \in [0, 1] : \theta(p) > 0\}.$$

est le **paramètre critique**. On dit que le modèle présente une **transition de phase** lorsque $p_c \in]0, 1[$.

Le cas $d = 1$

Proposition

Lorsque $d = 1$, on a $p_c = 1$. On a donc, pour tout $p \in [0, 1[$,

$$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 0.$$

Le cas $d = 1$

Proposition

Lorsque $d = 1$, on a $p_c = 1$. On a donc, pour tout $p \in [0, 1[$,

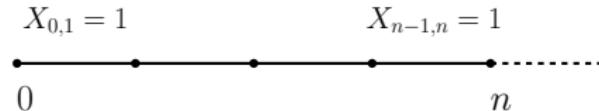
$$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 0.$$

Idée.

Soit $p \in [0, 1[$. Montrons que $\theta(p) = 0$. On a

$$\begin{aligned}\theta(p) &= \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \\ &\leq \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n) + \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow -n) \\ &= 2 \cdot \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n),\end{aligned}$$

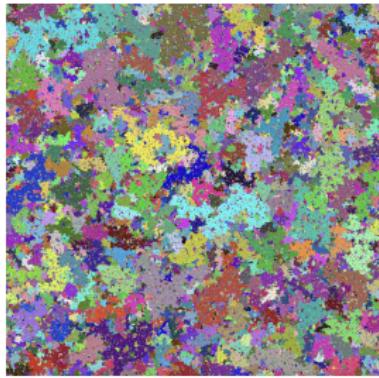
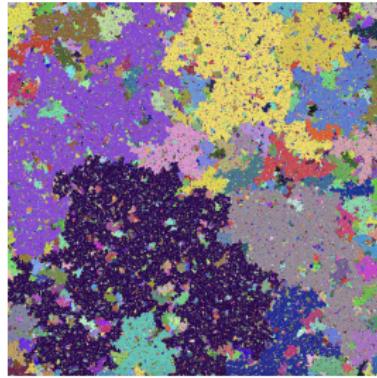
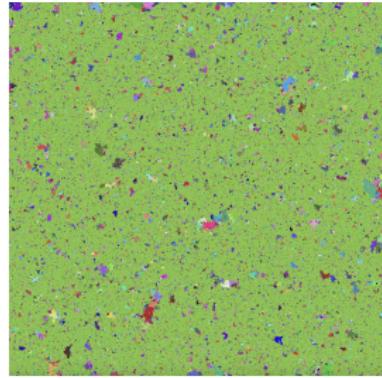
et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Le cas $d = 1$ 

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n) &= \mathbb{P}(X_{0,1} = 1 ; \dots ; X_{n-1,n} = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{0,1} = 1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_{n-1,n} = 1) \\
 &= p \cdot \dots \cdot p \\
 &= p^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

On a donc $\theta(p) = 0$.

□

Simulations en dimension $d = 2$  $p = 0.49$  $p = 0.5$  $p = 0.51$

Le résultat

Théorème

Lorsque $d \geq 2$, on a $p_c \in]0, 1[$. On a donc :

- pour tout $p \in [0, p_c[$,

$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 0$,

- pour tout $p \in]p_c, 1]$,

$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 1$.

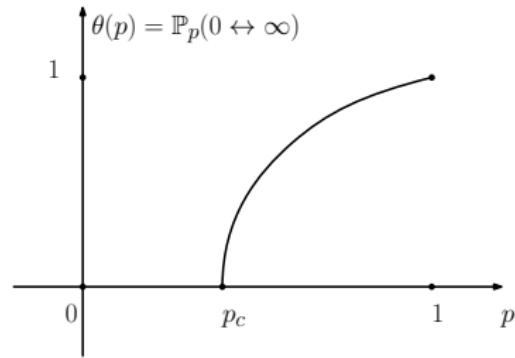
On peut même montrer que pour tout $p \in [0, 1]$, on a

$\mathbb{P}_p(\text{il existe au moins deux composantes connexes infinies}) = 0$.

La grosse question

Théorème

Lorsque $d = 2$, on a $p_c = 1/2$, et $\theta(1/2) = 0$.



Lorsque $d \geq 3$, on ne sait pas calculer p_c . On conjecture que $\theta(p_c) = 0$, mais on ne sait pas le démontrer pour $d = 3$.

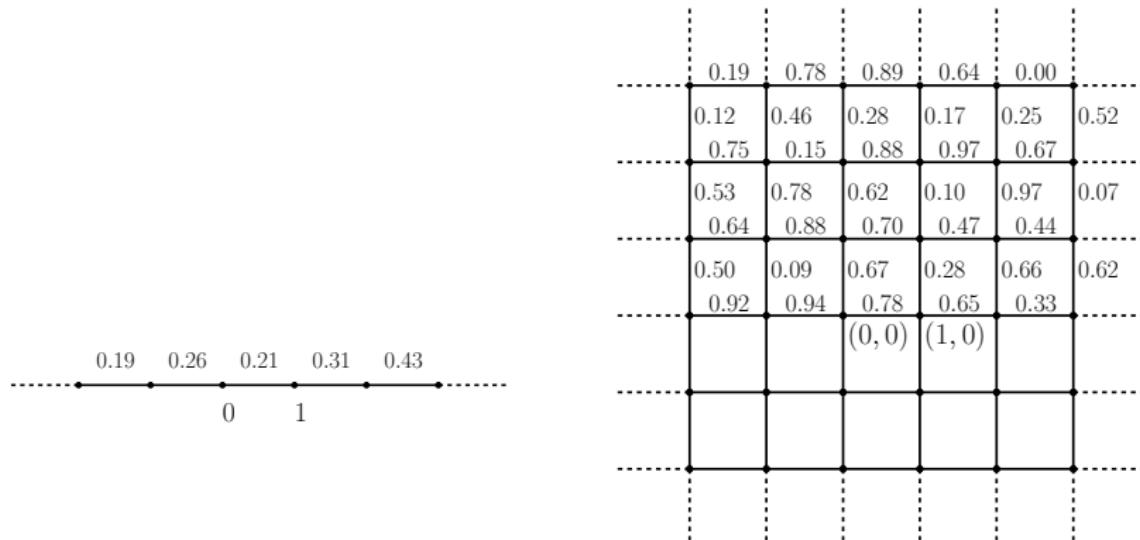
- 1 Percolation par arêtes dans \mathbb{Z}^d
- 2 Percolation de premier passage
- 3 Géométrie aléatoire avec des processus de Poisson de routes

Le modèle

À chaque arête e de \mathbb{Z}^d , on attribue un **temps de passage** aléatoire $T_e \in [0, \infty]$, et ce indépendamment des autres arêtes.

Le modèle

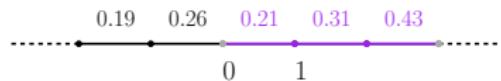
À chaque arête e de \mathbb{Z}^d , on attribue un **temps de passage** aléatoire $T_e \in [0, \infty]$, et ce indépendamment des autres arêtes.



Le modèle

À chaque chemin $\gamma = (e_1, \dots, e_n)$, on attribue le temps de trajet

$$T(\gamma) = T_{e_1} + \dots + T_{e_n}.$$



0.19	0.78	0.89	0.64	0.00	0.52
0.12	0.46	0.28	0.17	0.25	0.52
0.75	0.15	0.88	0.97	0.67	
0.53	0.78	0.62	0.10	0.97	0.07
0.64	0.88	0.70	0.47	0.44	
0.50	0.09	0.67	0.28	0.66	0.62
0.92	0.94	0.78	0.65	0.33	
		(0, 0)	(1, 0)		

Le modèle

Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$T(x, y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

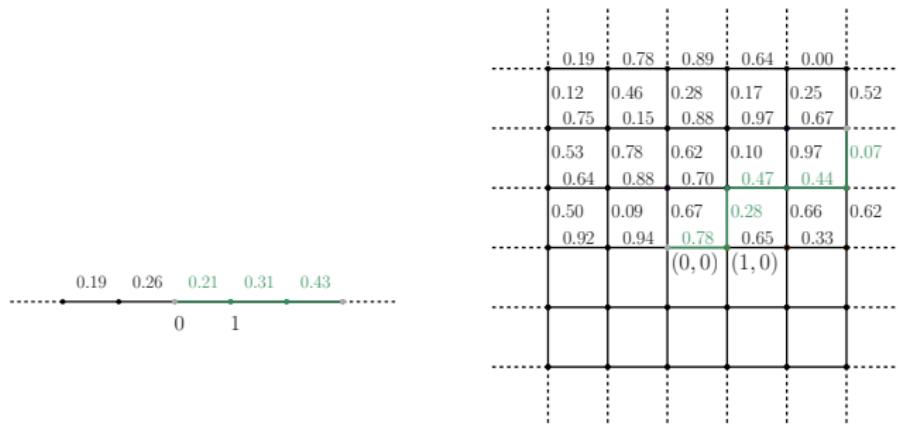
Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y .

Le modèle

Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$T(x, y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y .



Le modèle

Modèle introduit par Hammersley et Welsh en 1965.

Le modèle

Modèle introduit par Hammersley et Welsh en 1965.

Question(s) : à quoi ressemble

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : T(0, x) \leq t\}$$

pour t grand ?

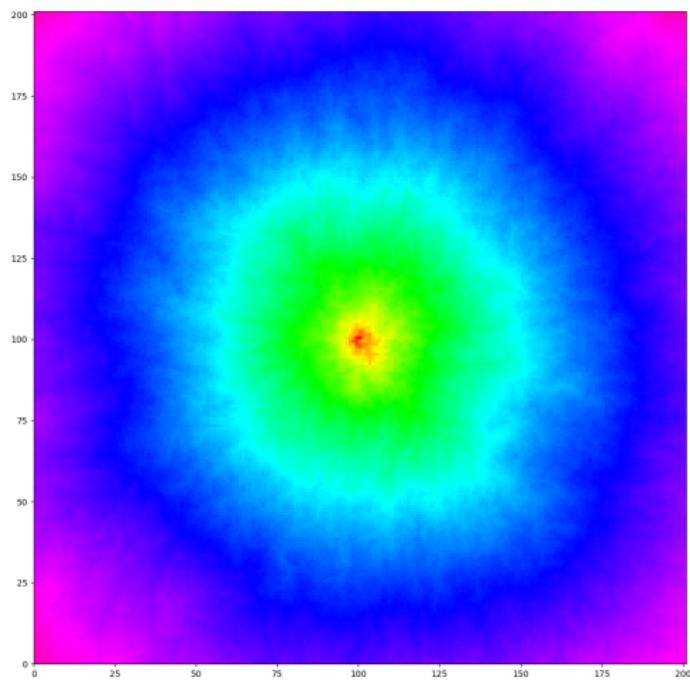
Le modèle

Modèle introduit par Hammersley et Welsh en 1965.

Question(s) : à quoi ressemble

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : T(0, x) \leq t\}$$

pour t grand ? Comment se comporte $T(0, ne_1)$ pour n grand, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$?

Simulation en dimension $d = 2$ 

Le cas $d = 1$

Proposition

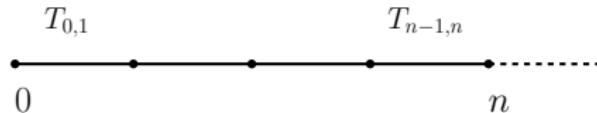
Lorsque $d = 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{T(0, n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T_e]\right) = 1,$$

où $\mathbb{E}[T_e]$ est l'espérance de la variable aléatoire T_e .

Le cas $d = 1$

Idée.



On a

$$\frac{T(0, n)}{n} = \frac{T_{0,1} + \dots + T_{n-1,n}}{n},$$

où les variables aléatoires $T_{0,1}, \dots, T_{n-1,n}$ sont indépendantes et de même loi que T_e . Le résultat découle de la **loi des grands nombres**. □

Le résultat

Théorème

Lorsque $d \geq 2$, il existe une constante $\gamma \in [0, \mathbb{E}[T_e]]$ telle que

$$\mathbb{P}\left(\frac{T(0, ne_1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma\right) = 1.$$

Le résultat

Théorème

Lorsque $d \geq 2$, il existe une constante $\gamma \in [0, \mathbb{E}[T_e]]$ telle que

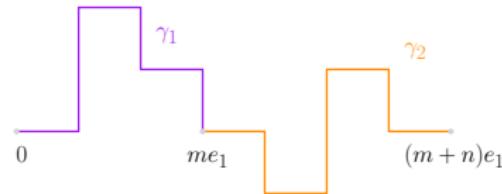
$$\mathbb{P}\left(\frac{T(0, ne_1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma\right) = 1.$$

Idée.

Le résultat découle de la propriété de **sous-additivité** suivante : pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$T(0, (m+n)e_1) \leq T(0, me_1) + T(me_1, (m+n)e_1).$$

Sous-additivité



Pour tous chemins γ_1 de 0 à me_1 et γ_2 de me_1 à $(m+n)e_1$, on a

$$T(0, (m+n)e_1) \leq T(0, me_1) + T(me_1, (m+n)e_1).$$

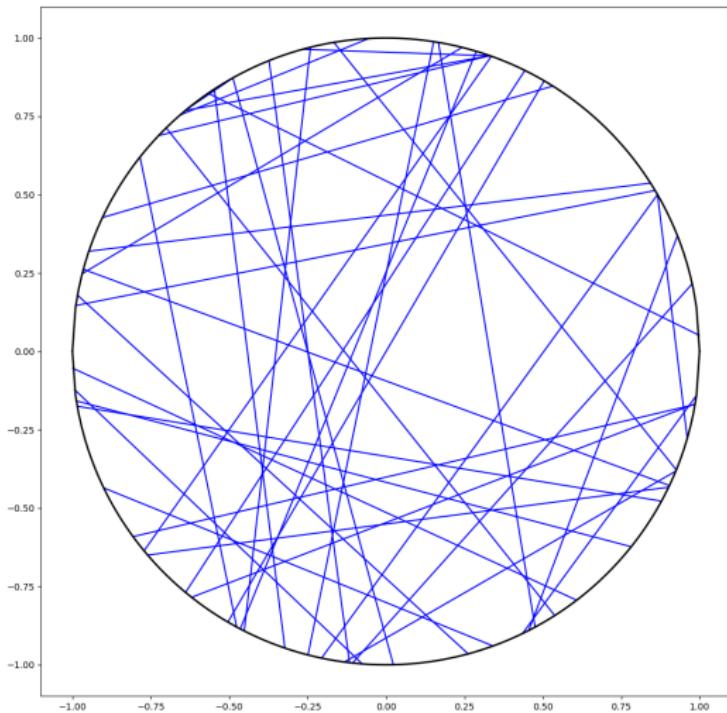
On en déduit que

$$T(0, (m+n)e_1) \leq T(0, me_1) + T(me_1, (m+n)e_1).$$



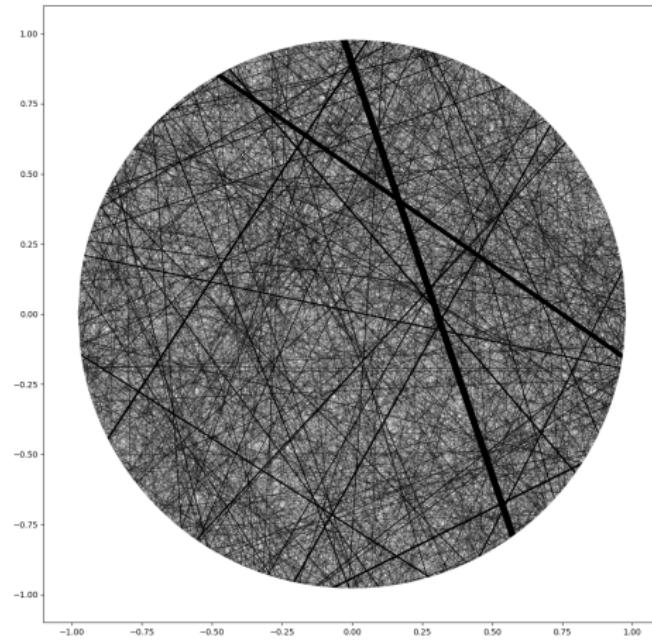
- 1 Percolation par arêtes dans \mathbb{Z}^d
- 2 Percolation de premier passage
- 3 Géométrie aléatoire avec des processus de Poisson de routes

Processus de Poisson de droites



Processus de Poisson de routes

Une route est un couple (ℓ, v) , où $\ell \subset \mathbb{R}^d$ est une droite (affine), et $v \in \mathbb{R}_+^*$ est la limitation de vitesse sur ℓ .



Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans \mathbb{R}^d .

Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans \mathbb{R}^d .

On roule sur le réseau de routes aléatoire engendré par le processus, en respectant les limitations de vitesse : à chaque chemin γ , on associe son temps de trajet $T(\gamma)$.

Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans \mathbb{R}^d .

On roule sur le réseau de routes aléatoire engendré par le processus, en respectant les limitations de vitesse : à chaque chemin γ , on associe son temps de trajet $T(\gamma)$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$T(x, y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y .

Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans \mathbb{R}^d .

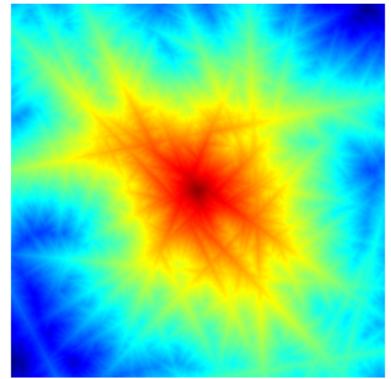
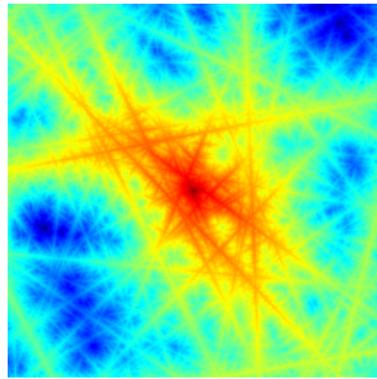
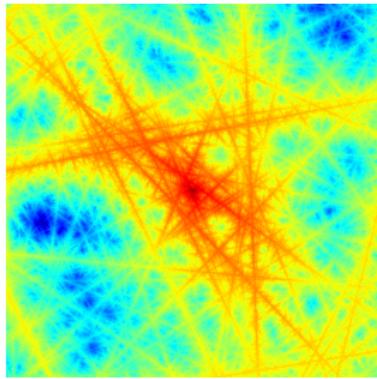
On roule sur le réseau de routes aléatoire engendré par le processus, en respectant les limitations de vitesse : à chaque chemin γ , on associe son temps de trajet $T(\gamma)$.

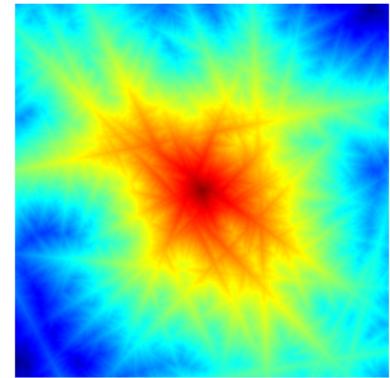
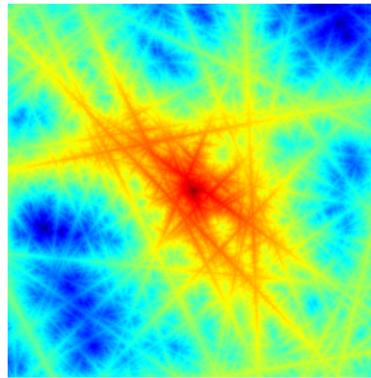
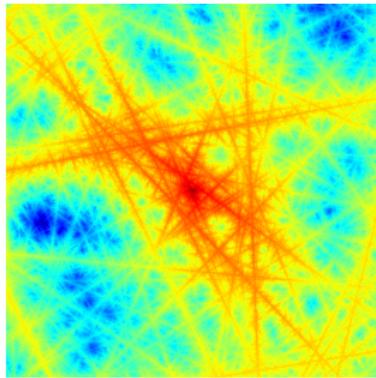
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$T(x, y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y .

Modèle introduit par Aldous en 2012.

Simulations en dimension $d = 2$ 

Simulations en dimension $d = 2$ 

Merci de votre attention !

Mathématiques dans la perception visuelle des contours

M. Virginia Bolelli

CentraleSupélec, L2S – Paris-Saclay

March 14th, 2024

1 Phénomènes perceptuels

- Les lois de la Gestalt

2 Le cortex cérébral et les voies visuelles primaires

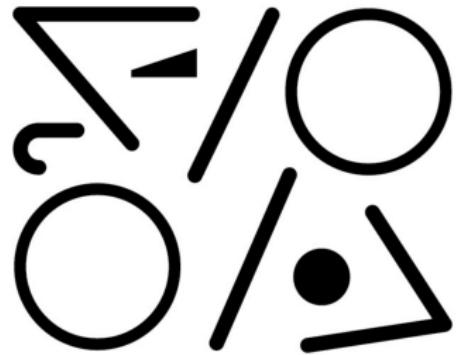
- Cortex visuel primaire

3 Modèles neurogéométriques de la perception visuelle des contours

- Le modèle Citti-Sarti

Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?



Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?

Quelques remarques:

- La perception est une tâche globale : l'ensemble est différent de la somme des parties individuelles.

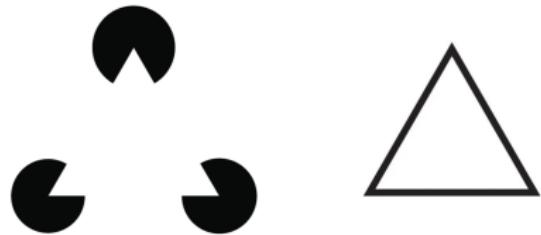


Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?

Quelques remarques:

- La perception est une tâche globale : l'ensemble est différent de la somme des parties individuelles.
- L'image perçue n'est pas la vraie.

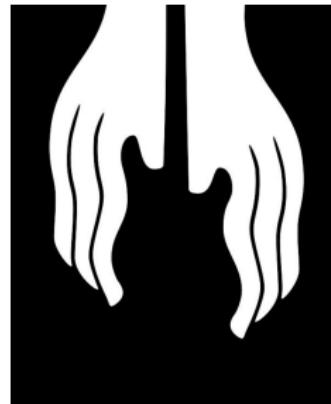


Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?

Quelques remarques :

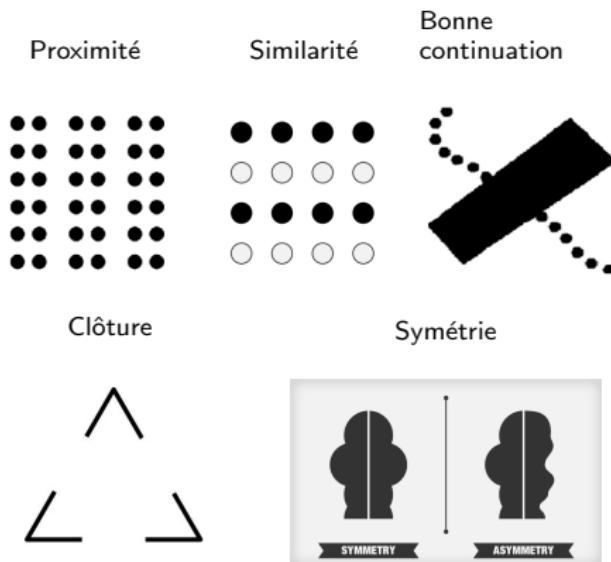
- La perception est une tâche globale : l'ensemble est différent de la somme des parties individuelles.
- L'image perçue n'est pas la vraie.
- L'image perçue n'est pas unique.



Les lois de la Gestalt sur l'organisation de la perception

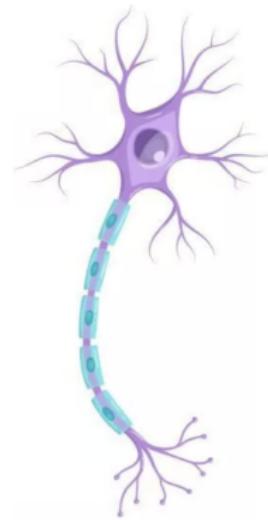
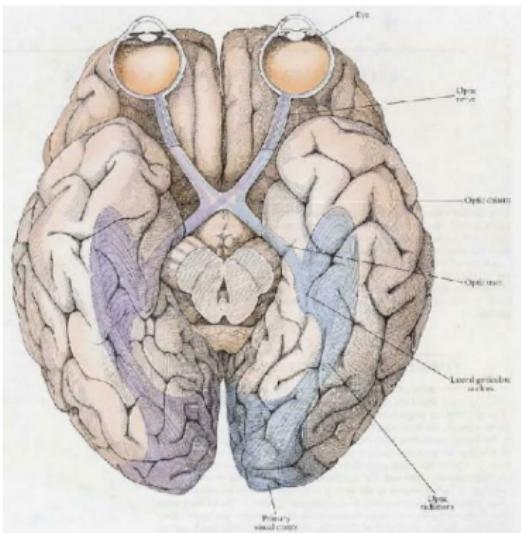
Théorie de la Gestalt ("forme" en allemand): le stimulus perçu est quelque chose de plus que la simple somme de toutes ses parties [Kof35, Koh29, Wer23].

Quelques lois qui guident notre perception visuelle:



Système visuel

Le système visuel est à la base de la perception et implique plusieurs organes dans le traitement du signal visuel.



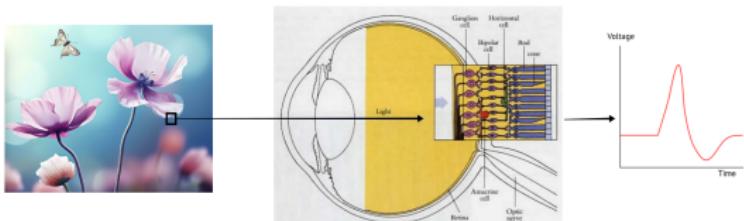
La voie visuelle décrit les aires corticales impliquées, qui comprennent un vaste réseau de neurones interconnectés, travaillant ensemble pour traiter l'information reçue.

De la rétine au V1

Les mécanismes neuronaux impliqués dans le système visuel prennent naissance dans la rétine et se propagent. Nous nous concentrerons sur le cortex visuelle primaire.

Rétine

- Transduction: l'image se transforme en signal électrique.
- Transmission du signal.



LGN

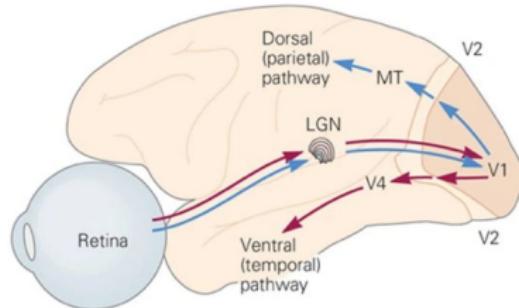
(Lateral Geniculate Nucleus)



V1

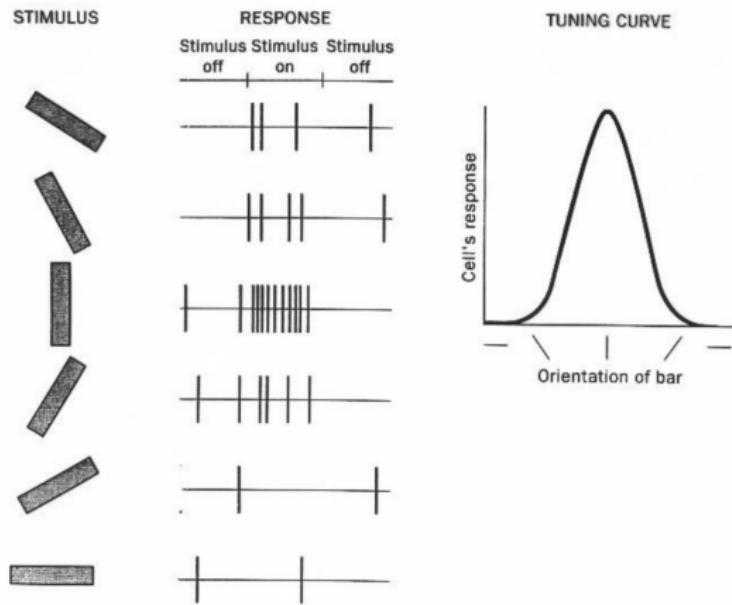
(Cortex visuel primaire)

Chargé de traiter les informations visuelles.



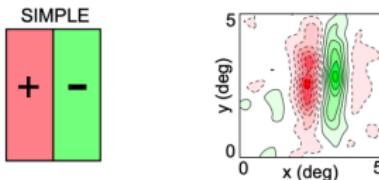
Cellules simples de V1

- L'un des principaux types de neurones dans V1
- Sensible à l'orientation : forte réponse aux lignes et aux bords avec des orientations spécifiques dans le champ visuel.



Profil réceptif des cellules simples de V1

Il représente la réponse d'une cellule en fonction de la présence d'un stimulus sur la rétine.
Images from [DAOF95, Wan95].

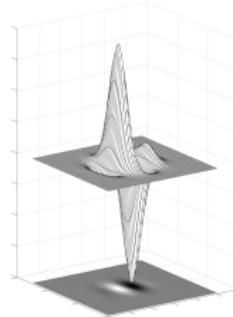


Cette réponse est formalisée mathématiquement en termes de filtres de Gabor:

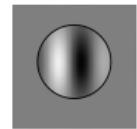
$J \subset \text{RETINA}$

$$\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto e^{-\frac{\|(x, y)\|^2}{\sigma}} \cdot \sin(2\pi f x + \phi)$$



Gabor patch

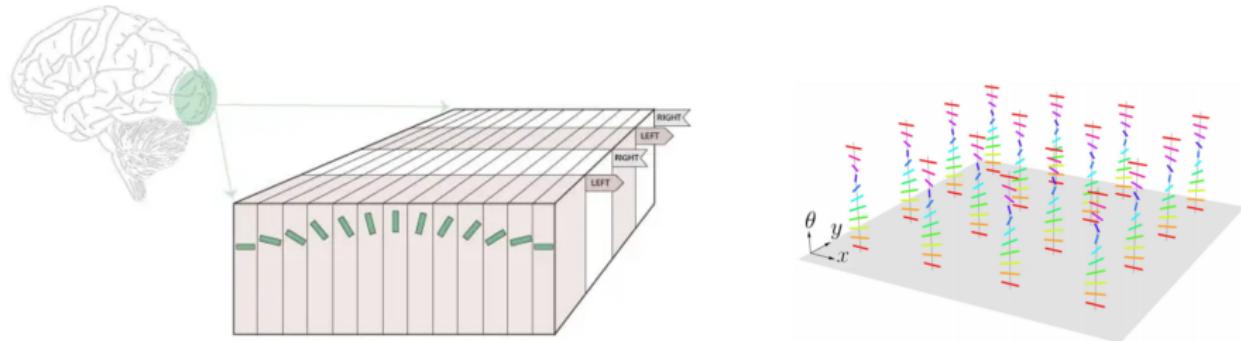


Les lignes de niveau de φ (patch de Gabor) indiquent la direction préférentielle et sont conformes à la mesure des profils.

Organisation en colonnes des cellules simples de V1

Hubel-Wiesel [HW62]: les cellules simples sélectives de l'orientation sont disposées en colonnes dans le cortex visuel primaire. Précisément:

- orientation préférentielle constante perpendiculairement à la surface corticale
- orientation préférentielle varie progressivement dans les directions parallèles à la surface, de telle sorte que différentes colonnes sont sensibles à différentes orientations

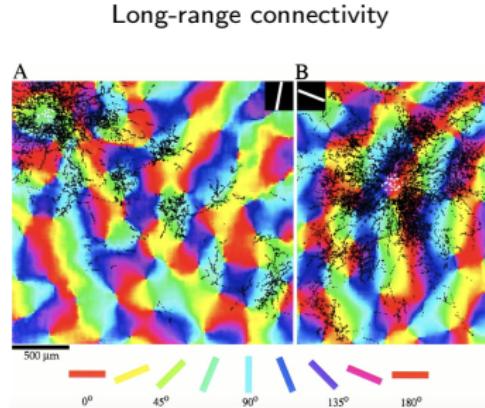
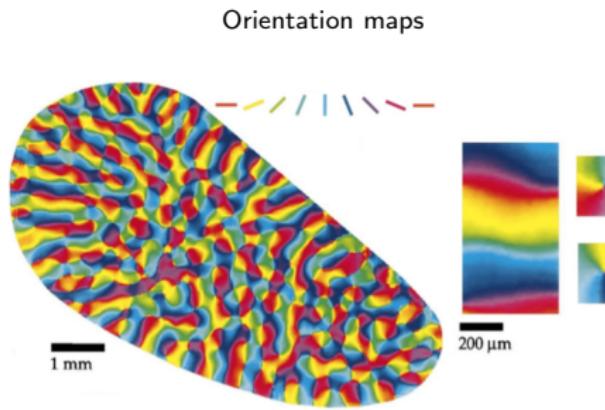


La structure anatomique reflète les propriétés fonctionnelles des cellules simples :

- Chaque point de la rétine est lié à une structure colonnnaire dans V1.
- Cela favorise le traitement des informations liées à l'orientation.

Connectivité corticale en V1

Cartes d'orientation [MAHG93, BZSF97] : représentent la disposition spatiale des neurones dans V1 en fonction de leurs préférences d'orientation. La préférence d'orientation d'un point à l'autre varie progressivement.



Les connexions sont mesurées à l'aide d'un traceur. Elles sont:

- isotropes dans le voisinage du point d'injection.
- anisotropes (fortement directionnelles) entre des neurones distants.

Modèles mathématiques pour la vision

OBJECTIF : comprendre comment on intègre les informations perceptuelles et neuronales pour identifier les contours.

Seconde moitié de 1900 :

- Koenderink-van Doorn [KvD76, KvD87]
- Mumford [Mum94]
- Hoffmann [Hof89]

Petitot-Tondut [PT99]: neurogéométrie de la vision.

Utiliser les instruments de la géométrie différentielle et de la théorie des groupes pour expliquer le comportement du cortex visuel à partir de son architecture fonctionnelle.

Développement après 2000 :

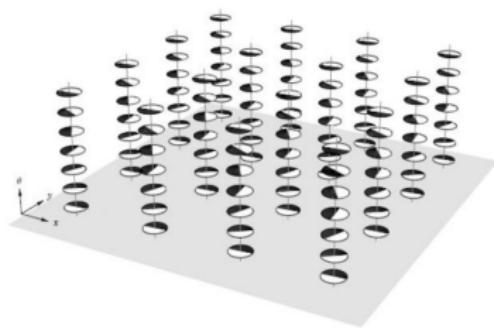
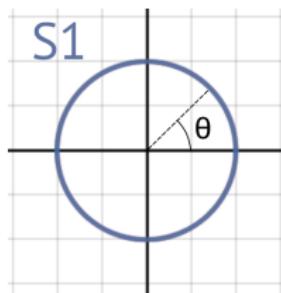
- Zucker [BSZ04]
- Citti-Sarti [CS06], Sarti-Citti-Petitot [SCP07]
- Duits van Almsick Franchen, ter Haar Romeny
- ...et bien d'autres !

Le modèle Citti-Sarti dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

Definition

L'espace perceptif, c'est-à-dire la représentation mentale de l'information sensorielle, est défini dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Columnar organization of V1

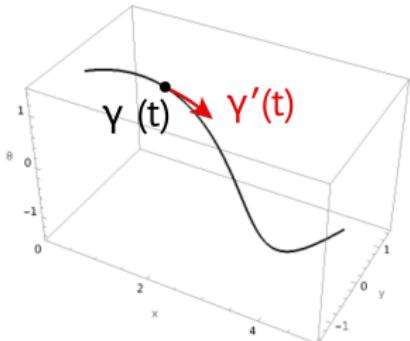


⇒ Étant donné un point $p = (x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, celui-ci est identifié à une cellule simple de V1 sélective de l'orientation θ .

Definition

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ une courbe paramétrique. Le **vecteur tangent** est donné par $\gamma'(t)$ s'il existe et si $\gamma'(t) \neq 0$.

Il représente la direction locale de la courbe.

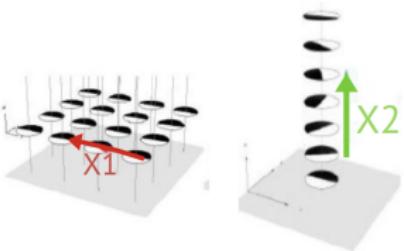


Privileged direction in V1

Famille de courbes admissibles dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

On considère $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ t.q.

$$\gamma'(t) = X_1 + kX_2.$$



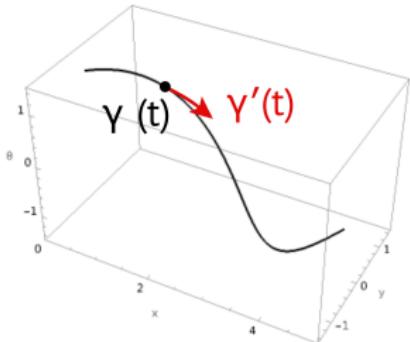
On peut relier toutes les paires de points en utilisant ces deux directions !

Courbes de connectivité en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

Definition

Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ une courbe paramétrique. Le **vecteur tangent** est donné par $\gamma'(t)$ s'il existe et si $\gamma'(t) \neq 0$.

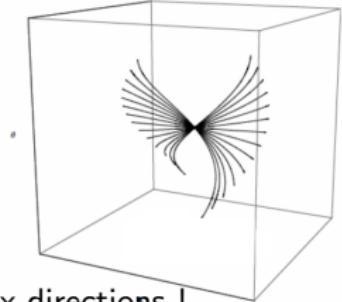
Il représente la direction locale de la courbe.



Famille de courbes admissibles dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

On considère $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ t.q.

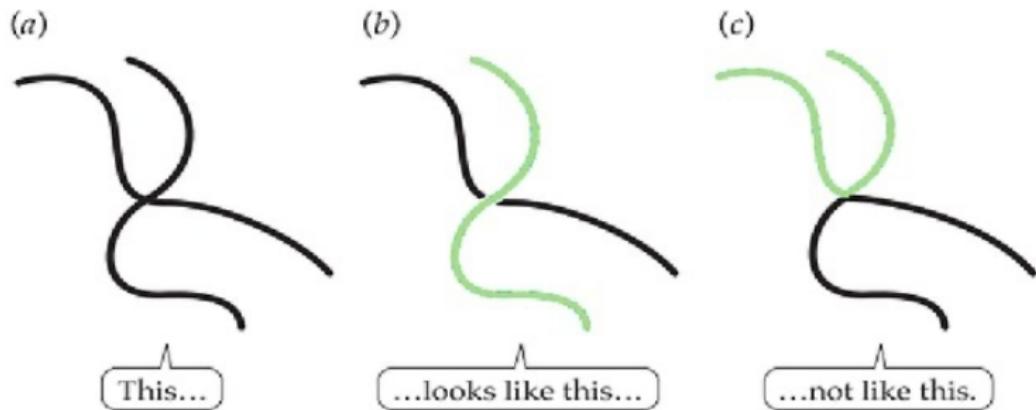
$$\gamma'(t) = X_1 + kX_2.$$



On peut relier toutes les paires de points en utilisant ces deux directions !

La loi Gestalt de la bonne continuation

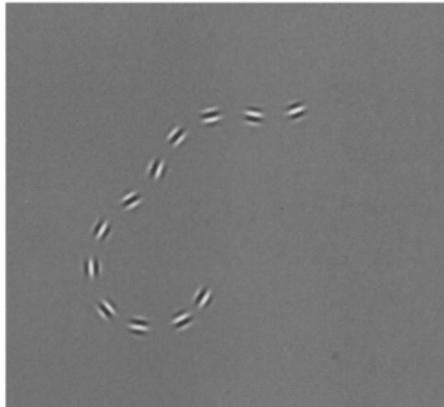
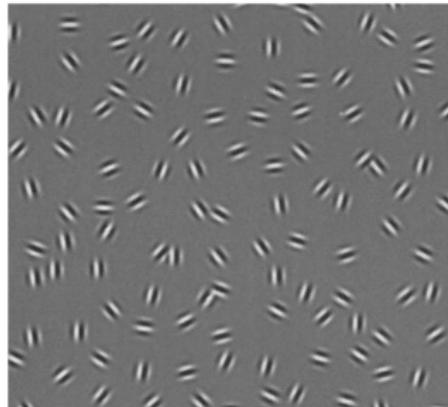
"Les éléments alignés (ou ayant un alignement comparable) tendent à former une courbe continue. Les gens ont tendance à percevoir les objets alignés comme formant des contours lisses et ininterrompus".



Comment le système visuel encode la bonne continuation du contour?

Expérience psychophysique proposée par Field, Hayes et Hess

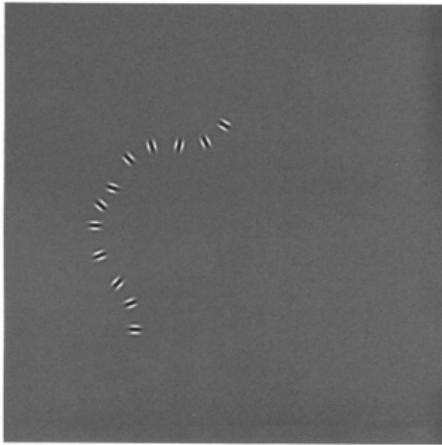
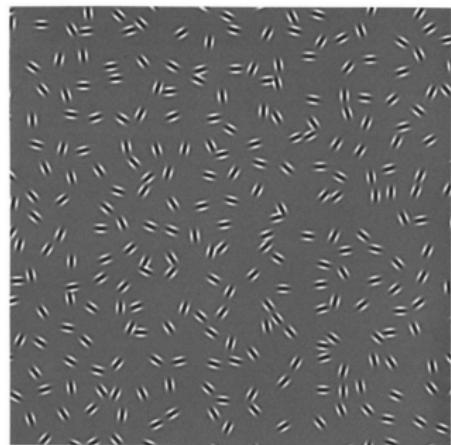
L'expérience proposée dans [FHH93] implique la présentation d'une image contenant des patchs de Gabor alignés, disposés en forme de chemin, superposée à un grand nombre de patchs de Gabor distribués aléatoirement.



Le but de l'expérience était de tester la capacité du sujet à détecter les unités perceptives présentes dans le stimulus visuel:

Expérience psychophysique proposée par Field, Hayes et Hess

L'expérience proposée dans [FHH93] implique la présentation d'une image contenant des patchs de Gabor alignés, disposés en forme de chemin, superposée à un grand nombre de patchs de Gabor distribués aléatoirement.



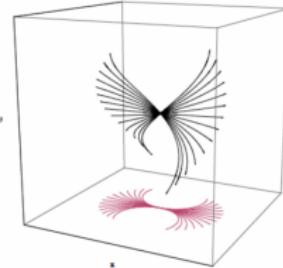
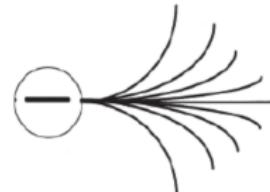
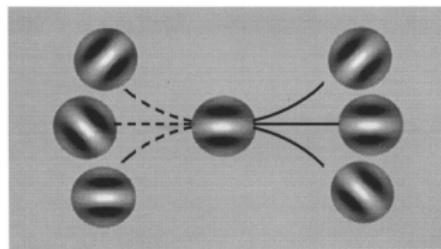
Le but de l'expérience était de tester la capacité du sujet à détecter les unités perceptives présentes dans le stimulus visuel:

- changement de l'orientation des patchs de Gabor formant le chemin détruit la perception.

Expérience psychophysique proposée par Field, Hayes et Hess

Champs d'associations: description du schéma permettant de déterminer quels éléments (patches de Gabor) peuvent être associés à la même unité perceptive en termes d'orientation et de position. Il y a une forte corrélation entre:

- éléments alignés ;
- éléments co-circulaires.



⇒ L'ensemble des courbes proposées pour décrire les champs d'associations est bien formalisé par la famille des courbes admissibles dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Definition

Une **distance** d sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes, pour tout x, y, z dans X :

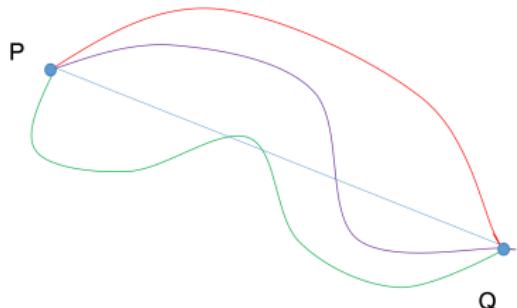
- 1 $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

On considère, pour $p, q \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} \{ \ell(\gamma) \mid \gamma \text{ est une courbe reliant } p \text{ et } q \}$$

Cette distance dépend de :

- Les courbes reliant les points p et q .
- La notion de longueur ℓ



Sphères induites par la distance

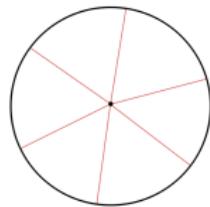
On considère la sphère de rayon r centrée en x :

$$S_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

(l'ensemble des points qui sont à distance r de x .)

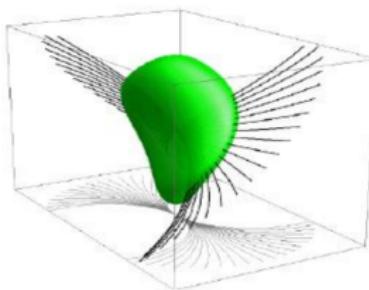
Les courbes qui définissent la distance affectent la forme des sphères :

\mathbb{R}^2



Sphère euclidienne

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$



Champ d'association sphère

\mathbb{R}^2 -projection



La distance mesure la corrélation entre les points, qui peuvent être regroupés en unités perceptives.

L'individualisation des contours perceptifs

Algorithme proposé par [SC15] :

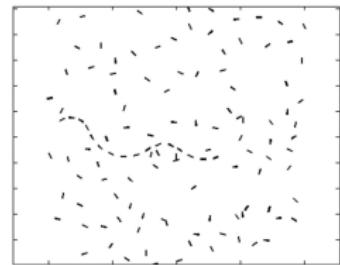
$\#\{\text{ensemble de points de l'image}\} = 120$.

Pour chaque couple (i, j) de points d'image avec $i, j = 1 \dots 120$, on définit:

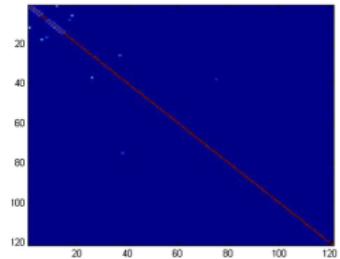
$$A(i, j) := e^{-d(i, j)^2}.$$

A est une mesure de l'affinité entre les points.

Image in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$



Affinity Matrix A



L'individualisation des contours perceptifs

Algorithme proposé par [SC15] :

$\#\{\text{ensemble de points de l'image}\} = 120$.

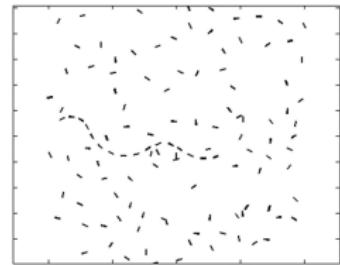
Pour chaque couple (i, j) de points d'image avec $i, j = 1 \dots 120$, on définit:

$$A(i, j) := e^{-d(i, j)^2}.$$

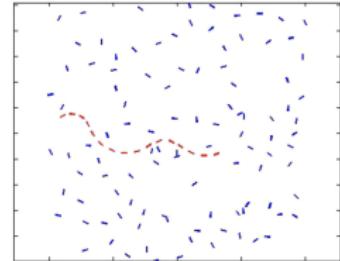
A est une mesure de l'affinité entre les points.

Les points les plus affiné sont indiqués en rouge. Ils détectent le contour bidimensionnel perçu.

Image in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$



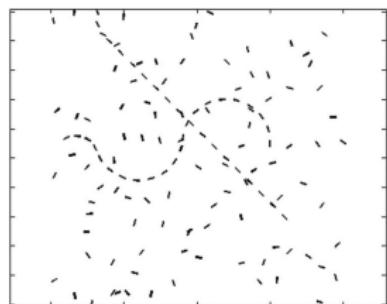
Detected contour



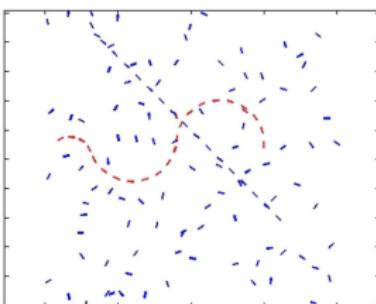
L'individualisation des contours perceptifs

Stimulus avec 2 unités perceptives.

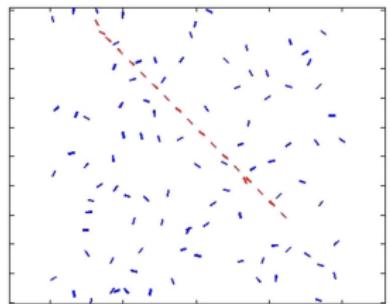
Image in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$



1st percept



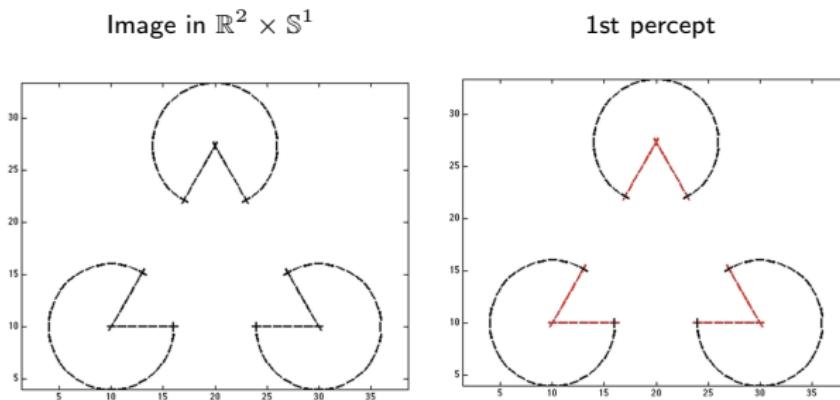
2nd percept



- Individualisation des 2 contours de l'image.
- La corrélation la plus forte découle de l'unité perceptive courbe.
- Les éléments disposés en lignes droites sont également corrélés : ils forment la deuxième unité perceptive.

L'individualisation des contours perceptifs

Triangle de Kanisza (August Kanisza 1858).



- Les éléments les plus fortement corrélés sont représentés en rouge. Ils correspondent au triangle de l'image Kanisza.
- Il existe une deuxième corrélation, plus faible (non illustrée), qui permet de récupérer les cercles.
- Cela montre que le triangle est plus saillant que les cercles, ce qui confirme qu'il s'agit d'un bon modèle pour les mécanismes de perception visuelle.

✿ Phénomènes perceptuels

- Les lois de la Gestalt sur l'organisation de la perception

✿ Système visuel

- Architecture fonctionnelle du cortex visuel primaire pour les cellules simples sélectives de l'orientation.

✿ Modèle neurogéométrique proposé par Citti-Sarti in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

- La perception des stimuli visuels dérive d'une notion de distance basée sur des courbes spécifiques. Ces courbes sont dirigées par les cellules simples de V1, et les informations qu'elles véhiculent sont liées à la loi de bonne continuation de Gestalt.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION!!

References |



O. Ben-Shahar and S. Zucker.

Geometrical computations explain projection patterns of long-range horizontal connections in visual cortex.
Neural computation, 16(3):445–476, 2004.



W. H. Bosking, Y. Zhang, B. Schofield, and D. Fitzpatrick.

Orientation selectivity and the arrangement of horizontal connections in tree shrew striate cortex.
J. Neurosci.; Journal of Neuroscience, 17(6):2112–2127, 1997.



G. Citti and A. Sarti.

A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space.
Journal of Mathematical Imaging and Vision, 24(3):307–326, feb 2006.
doi:10.1007/s10851-005-3630-2.



G. C. De Angelis, I. Ohzawa, and R. D. Freeman.

Receptive-field dynamics in the central visual pathways.
Trends in neurosciences, 18(10):451–458, 1995.
doi:10.1016/0166-2236(95)94496-r.



D. J. Field, A. Hayes, and R. F. Hess.

Contour integration by the human visual system: Evidence for a local "association field".
Vision Research, 33(2):173–193, 1993.
doi:10.1016/0042-6989(93)90156-Q.



W. C. Hoffman.

The visual cortex is a contact bundle.
Applied Mathematics and Computation, 32(2):137–167, 1989.
doi:10.1016/0096-3003(89)90091-X.



D. H. Hubel and T. N. Wiesel.

Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex.
The Journal of Physiology, 160(1):106–154, jan 1962.
doi:10.1113/jphysiol.1962.sp006837.

References II



K. Koffka.

Principles of gestalt psychology (nueva york, harcourt, brace &co).
., 1935.



W. Kohler.

Gestalt psychology. new york: H. liveright, 1929.



J. J. Koenderink and A. J. van Doorn.

The singularities of the visual mapping.
Biological Cybernetics, 24(1):51–59, 1976.
doi:10.1007/BF00365595.



J. J. Koenderink and A. J. van Doorn.

Representation of local geometry in the visual system.
Biological Cybernetics, 55(6):367–375, Mar 1987.
doi:10.1007/bf00318371.



R. Malach, Y. Amir, M. Harel, and A. Grinvald.

Relationship between intrinsic connections and functional architecture revealed by optical imaging and in vivo targeted biocytin injections in primate striate cortex.

Proceedings of the National Academy of Sciences, 90(22):10469–10473, 1993.
doi:10.1073/pnas.90.22.10469.



D. Mumford.

Elastica and computer vision.

In *Algebraic geometry and its applications*, pages 491–506. Springer, 1994.
doi:10.1007/978-1-4612-2628-4_31.



J. Petitot and Y. Tondut.

Vers une neurogéométrie. fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux.

Mathématiques et Sciences humaines, 145:5–101, 1999.

URL: http://www.numdam.org/item/MSH_1999__145__5_0/.

References III



A. Sarti and G. Citti.

The constitution of visual perceptual units in the functional architecture of v1.
Journal of computational neuroscience, 38(2):285–300, 2015.



A. Sarti, G. Citti, and J. Petitot.

The symplectic structure of the primary visual cortex.
Biological Cybernetics, 98(1):33–48, Nov 2007.
doi:10.1007/s00422-007-0194-9.



B. A. Wandell.

Foundations of vision.
Sinauer Associates, 1995.



M. Wertheimer.

Laws of organization in perceptual forms.
Psychologische Forschung, 4, 1923.
doi:10.1037/11496-005.